REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Centre Universitaire Si El Haouès – Barika

Institut des Sciences

Département de Mathématiques

Algèbre II: Cours et exercices

Domaine: Mathématiques et Informatique (MI)

Filière: Mathématiques

Année: 1ère année Licence Mathématiques

Réalisé par:

Dr. Omar BARKAT

Année Universitaire : 2024/2025

Centre Universitaire de Barika
Département de Mathématiques

Module : Algèbre II

Dr. Omar BARKAT

Année universitaire : 2024-2025

S'il vous plaît se référer à ce travail comme suit :
Omar Barkat, *Algèbre II : Cours et exercices*. Département de Mathématiques, Institut des Sciences, Centre Universitaire de Barika, Algérie, (2025).

Avant-propos

Ce polycopié est l'aboutissement de la lecture de nombreux ouvrages dont la plupart sont cités dans la liste des références bibliographiques, il est principalement destiné aux étudiants de première année socle commun mathématiques et informatique dans le cadre du système LMD, ainsi que tout lecteur ayant besoin doutils de bases d'Algèbre linéaire. Je respect dans ce polycopié le programme officiel agrée par le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique de module Algèbre 2 du semestre 2 (voir, canevas damendement 2018 - 2019).

Ce polycopié se décompose en quatre chapitres :
Le premier chapitre vise à établir les principes de base des espaces vectoriels. L'objectif principal du deuxième chapitre est d'étudier la bonne notion d'application entre espaces vectoriels : applications linéaires. Dans ce chapitre nous présentons quelques définitions principales ; une application linéaire, image et noyau d'une application linéaire et l'inverse d'une application linéaire bijective. Ainsi une étude détaillée pour quelques propriétés fondamentales. Le troisième chapitre est essentiellement technique, là où les matrices jouent un rôle majeur pour faciliter les calculs. Dans ce chapitre, nous allons voir que dans le cas des espaces vectoriels de dimension finie, l'étude des applications linéaires se ramène étude des matrices. La relation étroite entre les applications linéaires et les matrices sera expliquée en détail au cours de ce chapitre. De plus, nous examinerons les déterminants et comment les calculer. Le dernier chapitre est consacré à la résolution de systèmes linéaires, où l'intérêt sera d'étudier les systèmes linéaires de n équations à n inconnus.

A la fin de chaque chapitre on pourra trouver une série d'exercices non résolus. On trouvera également à la fin de ce polycopié une liste de livres dont la consultation peut être un bon support, ou complément, de lecture.

Il est certain que la première version de cet ouvrage est perfectible, et qu'elle contient certaines erreurs, c'est pourquoi j'invite tous les lecteurs, enseignants ou étudiants à me faire parvenir leurs remarques et commentaires à mon adresse mail : omar.barkat@cu-barika.dz

Table des matières

1 Espace vectoriel

Ce premier chapitre vise à établir les principes de base des espaces vectoriels. La notion d'espace vectoriel est une structure fondamentale des mathématiques modernes. Il s'agit de dégager les propriétés communes que partagent des ensembles pourtant trés différents. Par exemple, on peut additionner deux vecteurs du plan, et aussi multiplier un vecteur par un réel. Il convient de mentionner ici que le lecteur devez habituer à penser en termes de "vecteurs" dans un sens très général : polynômes, matrices, suites, fonctions, etc.

1.1. Espaces et sous-espaces vectoriels

1.1.1. Espaces vectoriels

Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou un corps commutatif quelconque.

Définition 1.1. *Un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *est un ensemble non vide* E *muni de deux lois :*
• *une loi de composition interne dite loi d'addition et notée "+", c'est-à-dire de l'application* $E \times E$ *vers* E*,*
• *une loi de composition externe dite loi de multiplication par un scalaire et notée multiplicativement "·", c'est-à-dire de l'application* $\mathbb{K} \times E$ *vers* E*, telles que :*

(i) $(E, +)$ *est un groupe commutatif, où l' élément neutre noté* 0 *ou* 0_E *et le symétrique d'un élément* x *de* E *sera noté* $-x$ *;*

(ii) La loi externe doit vérifier pour tout $x \in E$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *:* $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$ *et* $1 \cdot x = x$ *où* 1 *est le neutre de la multiplication de* $\mathbb{K}$ *;*

(iii) Les deux lois vérifient entre elles pour tout $x, y \in E$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *:*
$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ *et* $\alpha \cdot (x + y) = (\alpha \cdot x) + (\alpha \cdot y)$*.*

Convention :
On dira souvent un "$\mathbb{K}$-espace vectoriel" au lieu d'un "espace vectoriel sur $\mathbb{K}$".

Propriétés élémentaires :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $x \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors on a :
• $\alpha \cdot x = 0_E$ si et seulement si $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$;
• $-(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot (-x) = (-\alpha) \cdot x$.

Exemple 1.1. $\mathbb{R}$ *est un* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel.*

Exemple 1.2. *On considère* $\mathbb{K}^n$ *l'ensemble des suites ordonnées de* n *éléments de* $\mathbb{K}$, *i.e.,* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *avec* n *un entier strictement positif. Soient* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *et* $x' = (x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ *deux éléments de* $\mathbb{K}^n$ *et soit* $\alpha \in \mathbb{K}$, *on pose :*
$x + x' = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, ..., x_n + x'_n)$ *et* $\alpha \cdot x = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, ..., \alpha \cdot x_n)$.
Muni de ces deux lois, il est facile de vérifier que $\mathbb{K}^n$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. En particulier, tout corps commutatif* $\mathbb{K}$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. L'exemple typique et le plus simple dans ce cas, lorsque* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Exemple 1.3. *L'ensemble* $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *muni des lois usuelles d'addition des fonctions, et de multiplication d'une fonction par un scalaire :* $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ *et* $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$, *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

1.1.2. Sous-espaces vectoriels

Montrer qu'un ensemble E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel à partir de la définition peut être assez long. Il existe une autre technique, c'est de montrer qu'un sous-ensemble F de E est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : c'est la notion de sous-espace vectoriel.

Dans cette sous-section, E désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 1.2. *Une partie* F *de* E *est appelée sous-espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *de* E *si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) $0_E \in F$;

(ii) $\forall x, y \in F$, $x + y \in F$;

(iii) $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x \in F$; $\alpha \cdot x \in F$.

Interprétation :
Les conditions de la définition ci-dessus signifient qu'un sous-ensemble non vide F de E est un sous-espace vectoriel de E si F est stable pour l'addition et pour la multiplication par un scalaire.

Lemme 1.1. *Une partie* F *de* E *est appelée sous-espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *de* E *si :*

(i) $(F, +)$ *est un sous-groupe de* $(E, +)$;

(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$; $\alpha \cdot x \in E$.

La proposition suivante, présente une caractérisation d'un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 1.1. F *est un sous-espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *de* E *si et seulement si* F *est non vide et vérifie :*

$$\forall x, y \in F, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}; \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F. \tag{1.1}$$

Démonstration. $(\Rightarrow)$ D'aprés la définition de sous espace vectoriel, la condition nécessaire est évidente.
$(\Leftarrow)$ Supposons que $F \neq \emptyset$ vérifie la condition (1.1) et montrons que c'est un

sous-espace vectoriel de E. A cet effet, il suffit d'utiliser lemme 1.1 comme suit : d'une part, soient x et y deux éléments de F. Pour $\alpha = 1$ et $\beta = -1$, on a alors $x - y \in F$ ce qui implique $(F, +)$ est un sous-groupe de $(E, +)$. D'autre part, si on prend $y = 0$ dans la condition (1.1), on obtient (ii) de lemme 1.1. $\square$

Proposition 1.2. *Si F est un sous-espace vectoriel de E, et qu'on le munit des lois induites par celles de E, alors c'est un espace vectoriel. Autrement dit, un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel est un espace vectoriel.*

Démonstration. On considère la structure $(E, +, \cdot)$. La stabilité de F pour les deux lois permet de munir cet ensemble d'une loi de composition interne et d'une loi de composition externe, en restreignant à F les opérations définies dans E. Les conditions relatives à les deux lois interne et externe sont vérifiés, puisque ils sont satisfaits dans E donc en particulier dans F, qui est inclus dans E. $\square$

Exemple 1.4. *E et $\{0_E\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E.*

Exemple 1.5. *Une droite passant par l'origine, un plan passant par l'origine sont des sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.*

Exemple 1.6. *L'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y + 1 = 0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, car le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^2}$ n'appartient pas à F.*

Proposition 1.3. *L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est encore un sous-espace vectoriel.*

Démonstration. On considère F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Tout d'abord $0_E \in F_1$, car F_1 est un sous-espace vectoriel de E. De même, $0_E \in F_2$. Ainsi, $0_E \in F_1 \cap F_2$ et $F_1 \cap F_2$ est donc non vide. Soient $x, y \in F_1 \cap F_2$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a alors $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F_1$ puisque F_1 est un sous-espace vectoriel de E. De même, $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F_2$. Ainsi, $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F_1 \cap F_2$. Il s'ensuit que $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E. $\square$

Lemme 1.2. *L'intersection de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E.*

Remarque 1.1. *En général, l'union de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel (sauf si l'un des deux espaces contient l'autre). En effet, si nous considérons $E = \mathbb{R}^2$ et les deux sous-espaces vectoriels $\mathcal{D}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = o\}$ et $\mathcal{D}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = o\}$. Alors, $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E. Par exemple, $(\frac{1}{2}, 0) + (0, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ est la somme d'un élément de $\mathcal{D}_1$ et d'un élément de $\mathcal{D}_2$, mais n'est pas dans $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$.*

1.2. Familles libres, Génératrices, Bases

Notion de combinaison linéaire :

Une combinaison linéaire de vecteurs $u_1, u_2, ..., u_n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, est un vecteur qui peut s'écrire $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u_i$. Les éléments $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ sont appelés coefficients de la combinaison linéaire.

Exemple 1.7. *Soient $u_1, u_2, ..., u_n$; n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On peut toujours écrire 0_E comme combinaison linéaire de ces vecteurs, car il suffit de prendre tous les coefficients nuls.*

Remarque 1.2. *Si F est un sous-espace vectoriel de E, et si $u_1, u_2, ..., u_p \in F$, alors toute combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot u_i$ est dans F.*

Notation 1.1. *Etant donné des vecteurs $u_1, u_2, ..., u_n$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on note $Vec(u_1, u_2, ..., u_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $u_1, u_2, ..., u_n$. Alors on écrit :*

$$Vec(u_1, u_2, ..., u_n) = \{u \in E \mid \exists(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n ; u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u_i\} .$$

Exemple 1.8. $Vec(0_E) = \{0_E\}$.

Maintenant, on considère une famille non vide $A = (u_1, u_2, ..., u_p)$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E avec $p \in \mathbb{N}^*$.

Définition 1.3. *On dit que A **engendre** E, ou encore qu'elle est **génératrice** de E si et seulement si $Vec(u_1, u_2, ..., u_p) = E$. En d'autres termes, tout vecteur de E est combinaison linéaire des éléments de A.*

Définition 1.4. *On dit que A est **libre** si et seulement si le vecteur nul $\{0_E\}$ est combinaison linéaire des éléments de A de façon unique. Autrement dit :*

$$si \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot u_i = 0_E \;\; alors \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 0_E .$$

Remarque 1.3. *Nous pouvons utiliser les expressions suivantes :*
- Si A est libre alors on dit aussi que les vecteurs $u_1, u_2, ..., u_p$ sont linéairement indépendants.
- Si A est n'est pas libre on dit que A est liée.

Propriétés :
1- Toute partie contenant une partie génératrice de E est encore une partie génératrice.
2- Une famille d'un seul vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.
3- Tout famille qui contient le vecteur nul est liée.
4- Toute famille qui contient une famille liée est liée.
5- Toute partie contenue dans une partie libre est libre.
6- Une famille A de deux vecteurs u_1, u_2 est liée si les vecteurs sont proportionnels. On dit aussi qu'ils sont colinéaires.
7- On considère une famille A de trois vecteurs u_1, u_2, u_3. Si deux d'entre eux sont colinéaires, alors la famille A est liée, mais la réciproque est fausse.

Définition 1.5. *On dit que A est une **base** d'un sous-espace vectoriel F de E si elle est **libre et génératrice**. En d'autres termes, tout vecteur de F est combinaison linéaire des éléments de A de façon unique. On a donc :*

$$\forall u \in F, \exists!(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p; u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot u_i \,,$$

*où $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ sont **les coordonnées** du vecteur u dans la base A, et on dit que F est de **dimension finie**.*

1.3. Espaces vectoriels de type fini

Définition 1.6. *Un espace vectoriel est dit de type fini s'il admet une famille génératrice finie. Autrement dit : si un espace vectoriel est engendré par une famille finie de vecteurs, on dit qu'il est de type fini.*

Théorème 1.1 (Théorème de la dimension)**.** *Dans un espace vectoriel de dimension finie E, toutes les bases ont le même nombre d'éléments. Ce nombre noté $\dim(E)$ est appelé la dimension de E.*
Soit A une famille d'éléments de E de dimension finie n. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- *(i) A est une base de E.*
- *(ii) A est libre et génératrice de E.*
- *(iii) A est libre et de cardinal n.*
- *(v) A est génératrice de E et de cardinal n.*

Remarque 1.4. *Il ne faut pas confondre entre la dimension et le cardinal ; dans un espace vectoriel de dimension n, toutes les bases ont le même cardinal, mais ne parlez pas de cardinal d'un espace vectoriel, ni de dimension d'une base.*

Remarque 1.5. *Pratiquement, on utilise le théorème ci-dessus pour montrer qu'une famille A est une base de E.*

Exemple 1.9. *Soient $u_1(1,2), u_2(2,-1)$ deux vecteurs de l'éspace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Vérifier que la famille $A = (u_1, u_2)$ engendre $\mathbb{R}^2$. Que peut-on conclure ?*
Pour montrer que A est une famille génératrice, on cherche deux réelles λ_1, λ_2 tel que : pour tout $u(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $u = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2$. Après le calcul on aura $\lambda_1 = \frac{1}{5}(x+2y)$, $\lambda_2 = \frac{1}{5}(2x-y)$. Ce qui signifie que A engendre $\mathbb{R}^2$. D'autre part, il est clair que A est libre, de cardinal 2, donc A est une base de $\mathbb{R}^2$.

Corollaire 1.1. *Tout espace vectoriel de type fini admet une base finie, et toutes ses bases ont le même cardinal.*

Corollaire 1.2. *Dans un espace vectoriel de dimension n, on a :*

- Toute famille libre a au plus n éléments.
- Toute famille génératrice a au moins n éléments.

Proposition 1.4. *Dans un espace vectoriel de type fini E, toute famille libre (ou génératrice) dont le nombre d'élément est égal à la dimension de E est une base.*

Proposition 1.5 (Caractérisation des sous-espaces vectoriels de dimension finie)**.** *Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de type fini est de type fini, et on a $dim(F) \leq dim(E)$, avec égalité si et seulement si $dim(F) = dim(E)$.*

Théorème 1.2 (Théorème de la base incomplète)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et L une famille libre de E. Alors il existe une base B de cardinal fini qui contient L.*

1.3.1. Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition 1.7. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $G = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ une famille de m vecteurs de E. Le rang de la famille G noté $rg(G)$ est la dimension du sous-espace vectoriel $F = Vect(v_1, v_2, ..., v_m)$ engendré par les vecteurs $v_1, v_2, ..., v_m$, i.e.,*

$$rg(G) = dim(F)\,.$$

Propriétés :
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $G = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ une famille de vecteurs de E. Alors on a :
- $0 \leq rg(G) \leq m$.
- Si $dim(F) = n$ (finie), alors $rg(G) \leq n$.
- $rg(G) = m$ si et seulement si G est libre.
- $rg(G) = 0$ si et seulement si tous les vecteurs de G sont nuls.

Exemple 1.10. *Soit $G = \{v_1 = (2,3), v_2 = (4,2), v_3 = (-3,4)\}$ une famille de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Déterminer le rang de G.*
Il est clair que v_2 et v_3 sont linéairement indépendants. D'autre part, en résolvant le système linéaire $\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3 = 0$, on obtient $2v_1 - v_2 - v_3 = 0$. La famille G est donc liée. On en déduit que $Vect(v_1, v_2, v_3) = Vect(v_2, v_3)$. Donc, $rg(G) = 2$.

1.4. Sous espace vectoriel supplémentaire

1.4.1. Somme de deux sous-espaces vectoriels

Comme nous l'avons vu précédemment, en général la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel. Alors, il est utile de connaître les sous-espaces vectoriels qui contiennent à la fois ces deux sous-espaces vectoriels. Aussi, en particulier le plus petit d'entre eux (bien sûr, au sens de l'inclusion).

Définition 1.8. *Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle somme de F_1 et de F_2 l'ensemble noté $F_1 + F_2$, des vecteurs qui sont la somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2 :*

$$F_1 + F_2 = \{u \in E \mid u = u_1 + u_2, u_1 \in F_1, u_2 \in F_2\}.$$

Remarque 1.6. *On peut caractériser les vecteurs u de la somme $F_1 + F_2$, par :*

$$u \in F_1 + F_2 \Leftrightarrow \exists (u_1, u_2) \in F_1 \times F_2 \mid u = u_1 + u_2\,.$$

Exemple 1.11. *Nous considérons deux droites vectorielles D_1 et D_2 sécantes dans l'éspace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$. Alors, il est bien clair que $D_1 + D_2 = \mathbb{R}^2$.*

Exemple 1.12. *On a : $F_1 + F_2 = E$ si et seulement si tout vecteur de E peut s'écrire comme la somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2.*

Proposition 1.6. *Si F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration. On considère F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Tout d'abord $0_E \in F_1$, car F_1 est un sous-espace vectoriel de E. De même, $0_E \in F_2$. Ainsi, $0_E = 0_E + 0_E \in F_1 + F_2$ et $F_1 + F_2$ est donc non vide.
Soient $x, y \in F_1 + F_2$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Comme $x \in F_1 + F_2$, il existe $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. Alors $\alpha \cdot x = \alpha \cdot (x_1 + x_2) = (\alpha \cdot x_1) + (\alpha \cdot x_2) \in F_1 + F_2$, car $\alpha \cdot x_1 \in F_1$ et $\alpha \cdot x_2 \in F_2$. De même pour $y \in F_1 + F_2$, nous obtenons $\beta \cdot y = \beta \cdot (y_1 + y_2) = (\beta \cdot y_1) + (\beta \cdot y_2) \in F_1 + F_2$, car $\beta \cdot y_1 \in F_1$ et $\beta \cdot y_2 \in F_2$ avec $y = y_1 + y_2$. Il s'ensuit que $\alpha \cdot x + \beta \cdot y = (\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot y_1) + (\alpha \cdot x_2 + \beta \cdot y_2) \in F_1 + F_2$. □

Proposition 1.7. *Si F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors $F_1 + F_2$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant à la fois F_1 et F_2.*

Démonstration. On montre d'abord que l'ensemble $F_1 + F_2$ contient à la fois F_1 et F_2. En effet, tout élément $u_1 \in F_1$ s'écrit $u_1 = u_1 + 0_E$ avec u_1 appartenant à F_1 et 0_E appartenant à F_2, car F_2 est un sous-espace vectoriel de E. Ainsi, u_1 appartient à $F_1 + F_2$. De même pour un élément de F_2.
Maintenant, on montre que si H est un sous-espace vectoriel contenant F_1 et F_2, alors $F_1 + F_2 \subset H$. Comme $F_1 \subset H$ on a donc, si $u_1 \in F_1$ alors en particulier $u_1 \in H$. De même, si $u_2 \in F_2$ alors $u_2 \in H$. Comme H est un sous-espace vectoriel, alors $F_1 + F_2 \subset H$. □

1.4.2. Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Définition 1.9. *Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que la somme $F_1 + F_2$ est directe si tout vecteur de $F_1 + F_2$ se décompose de manière unique comme la somme d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2.*

Notation 1.2. *Lorsque F_1 et F_2 sont en somme directe, on note $F_1+F_2 = F_1 \oplus F_2$.*

Remarque 1.7. *On peut caractériser les sous-espaces vectoriels en somme directe, par :*

$$F_1 + F_2 \text{ est directe } \Leftrightarrow F_1 \cap F_2 = \{0_E\}\,.$$

En effet, supposons que la somme $F_1 + F_2$ est directe et $u \in F_1 \cap F_2$. On peut alors écrire d'une part $u = u + 0_E$ avec $u \in F_1$ et $0_E \in F_2$, et d'une autre part $u = 0_E + u$ avec $0_E \in F_1$ et $u \in F_2$. Comme la somme $F_1 + F_2$ est directe, la décomposition de u suivant F_1 et F_2 est unique et par conséquent $u = 0_E$. Ceci prouve que $F_1 \cap F_2 \subset \{0_E\}$. Puisque F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors il est clair que l'inclusion inverse est vraie.
Réciproquement, supposons que $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ et montrons que la somme $F_1 + F_2$ est directe. Supposons que l'on ait

$$u = u_1 + u_2 = u_1' + u_2'\,, \tag{1.2}$$

avec $u_1, u_1' \in F_1$ et $u_2, u_2' \in F_2$. Alors,$u_1 - u_1' = u_2' - u_2$. Comme $u_1 - u_1' \in F_1$ et $u_2' - u_2 \in F_2$, le vecteur $v = u_1 - u_1' = u_2' - u_2 \in F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$. Ce qui implique que $u_1 = u_1'$ et $u_2 = u_2'$. Ainsi, l'écriture (1.2) de u est unique, ce qui signifie que la somme $F + G$ est directe.

Exemple 1.13. *Soit H un sous ensemble d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On peut définir l'espace vectoriel engendré par H comme la somme des droites engendrées par les éléments de H. Par exemple, si nous considérons les vecteurs $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ et $u = (1, 1, 0)$ de $\mathbb{R}^3$, alors il est clair que l'espace vectoriel engendré par $\{e_1, e_2, e_3\}$ est l'espace tout entier $\mathbb{R}^3$ alors que l'espace vectoriel engendré par $\{e_1, e_2, u\}$ est un plan. Les sous espaces engendrés par $\{e_1, e_2\}$ et $\{e_3\}$ sont en somme directe, mais les sous espaces engendrés par $\{e_1, e_2\}$ et par $\{e_2, u\}$ ne sont pas en somme directe.*

Exemple 1.14. *Deux droites sécantes du plan $\mathbb{R}^2$ sont en somme directe, puisque leur intersection est réduite au vecteur nul ($u = 0_{\mathbb{R}^2}$).*

Exemple 1.15. *Deux plans sécants de l'éspace $\mathbb{R}^3$ ne peuvent être en somme directe, puisque leur intersection est une droite et ne contient donc pas que le vecteur nul ($u = 0_{\mathbb{R}^3}$).*

1.4.3. Sous-espaces supplémentaires

Définition 1.10. *Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E si la somme $F_1 + F_2$ est directe et si celle-ci vaut E.*

Remarque 1.8. *On peut caractériser les sous-espaces supplémentaires, par :*

$$F_1 \text{ et } F_2 \text{ supplémentaires dans } E \Leftrightarrow F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \text{ et } F_1 + F_2 = E\,.$$

Autrement dit : $F_1 \oplus F_2 = E$.

Corollaire 1.3. *Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On a donc :*

$$F_1 \text{ et } F_2 \text{ supplémentaires dans } E \Leftrightarrow \forall u \in E, \exists!(u_1, u_2) \in F_1 \times F_2 \mid u = u_1 + u_2\,.$$

Remarque 1.9. *Il ne faut pas confondre la notion d'éspaces en somme directe avec la notion d'éspaces supplémentaires dans un autre. En effet, si nous considérons deux droites vectorielles D_1 et D_2 sécantes dans l'éspace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ avec $D_1 \cap D_2 = \{0_E\}$, et soit P le plan vectoriel qui les contient. Alors, il est clair que $D_1 + D_2 = P$. Ce qui signifie que leur somme est directe et vaut exactement le plan $P = D_1 \oplus D_2$. Ainsi, D_1 et D_2 sont supplémentaires seulement dans P, mais pas dans l'éspaces tout entier.*

Remarque 1.10. *En général, il n'y a pas unicité du supplémentaire. Autrement dit, pour un sous-espace vectoriel F_1 d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on peut trouver de nombreux supplémentaires différents F_2 tels que $F_1 \oplus F_2 = E$.*

Exemple 1.16. *Soient D_1, D_2 et D_3 trois droites deux à deux sécantes de l'éspace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$. Alors il est facile de voir que $D_1 \oplus D_2 = D_1 \oplus D_3 = \mathbb{R}^2$. Ce qui signifie que D_2 et D_3 sont des supplémentaires de D_1.*

Existence de sous-espaces supplémentaires en dimension finie :
Le théorème de la base incomplète dit que dans un espace vectoriel de dimension finie, toute famille libre peut être complétée en une base de l'espace. On en déduit immédiatement l'existence de supplémentaires.

Proposition 1.8. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F_1 un sous-espace vectoriel de E. Il existe un sous-espace vectoriel F_2 tel que*

$$E = F_1 \oplus F_2 \text{ et } dim(E) = dim(F_1) + dim(F_2)\,.$$

Théorème 1.3 (Formule de Grassmann)**.** *Si F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de E et que $F_1 + F_2$ est de type fini, alors*

$$dim(F_1 + F_2) = dim(F_1) + dim(F_2) - dim(F_1 \cap F_2)\,.$$

Théorème 1.4 (Caractérisation des supplémentaires)**.** *Si E est de type fini, alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $E = F_1 \oplus F_2$.

(ii) $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ *et* $dim(E) = dim(F_1) + dim(F_2)$.

(iii) $E = F_1 + F_2$ *et* $dim(E) = dim(F_1) + dim(F_2)$.

1.5. Exercices

Exercice 1.1. *On considère* $E_1 = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\}$ *: l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur l'intervalle* $[0;1]$*, muni de l'addition* $f + g$ *des fonctions et de la multiplication par un nombre réel* $\lambda \cdot f$*. Montrer que* E_1 *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

Exercice 1.2. *Soient* E_1, E_2, E_3 *trois ensembles définis comme suit :*
- $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$;
- $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y = x + z = 0\}$;
- $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z(x^2 + y^2) = 0\}$.

Déterminer lesquels d'entre eux sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1.3. *1- Décrire les sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}$ *; puis de* $\mathbb{R}^2$ *et* $\mathbb{R}^3$.
2- Prouver par un exemple que la réunion de deux sous-espaces, n'est pas un sous-espace vectoriel dans $\mathbb{R}^3$.
3- Soient F_1 *et* F_2 *deux sous-espaces d'un espace vectoriel* E*. Montrer que*

$$F_1 \cup F_2 \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \Leftrightarrow F_1 \subset F_2 \text{ ou } F_2 \subset F_1 .$$

Exercice 1.4. *Etudier l'indépendance linéaire des parties* A *suivantes sur les éspaces vectoriels* E *:*
- $E = \mathbb{R}^2$, $A = \{u_1 = (3, 1), u_2 = (2, 1)\}$.
- $E = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $A = \{f, g, h\}$, *telle que* $f : x \to 1$, $g : x \to \cos(x)$ *et* $h : x \to \sin(x)$*, avec* $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *est l'ensemble des applications définies de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.

Exercice 1.5. *Soient* $u_1 = (0, 1, -2), u_2(1, 1, 0), u_3(-2, 0, -2)$ *trois vecteurs de* $\mathbb{R}^3$.
1- Montrer que l'ensemble $\{u_1, u_2, u_3\}$ *forment une base de* $\mathbb{R}^3$.
2- Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$*, le vecteur* $u = (\alpha, 5, -5)$ *est une combinaison linéaire des vecteurs* u_1, u_2, u_3.

Exercice 1.6. *Soit* F *le sous ensemble de* $\mathbb{R}^3$ *défini par :*
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$.
1- Vérifier que F *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.
2- Trouver la dimension de F.
3- Trouver un supplémentaire de F *dans* $\mathbb{R}^3$.

2 Applications linéaires

Pour comparer des structures mathématiques du même type, on considère les applications d'un ensemble dans un autre qui préservent les opérations définies sur ces ensembles. Dans ce chapitre, nous étudierons la notion d'application entre espaces vectoriels dite application linéaire.
En algèbre linéaire, on s'intéresse aux applications qui préservent la structure d'espace vectoriel, c'est-à-dire, les applications d'un espace vectoriel dans un autre qui préservent l'addition et la multiplication par un scalaire.

2.1. Défnitions et Propriétés

Lorsque le contexte est évident, on note simplement les lois de E et de F par "+" et par "." pour simplifier les notations.

Définition 2.1 (Application linéaire). *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application de E dans F. On dit que f est* ***linéaire*** *(ou est un morphisme d'éspace vectoriel)si et seulement si les deux assertions suivantes sont vraies :*

$$\forall x, y \in E, f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(\lambda x) = \lambda f(x),$$

où d'une manière équivalente, si :

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)\,.$$

Définition 2.2 (Application linéaire). *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application de E dans F. On dit que f est* ***linéaire*** *(ou* ***morphisme*** *) si et seulement si :*
$\forall u_1, u_2 \in E, f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$ *et* $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u)$,
où d'une manière équivalente, si :
$\forall u_1, u_2 \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, f(\lambda \cdot u_1 + \mu \cdot u_2) = \lambda \cdot f(u_1) + \mu \cdot f(u_2)$.

Exemple 2.1. *On considère deux applications f et g définies comme suit :*
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *telle que* $f(x, y) = (x + y; x - y; 2y)$, *et*
$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *telle que* $g(x, y) = (x - y; xy)$ *avec* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
1- Étudiez la linéarité de f.
2- Vérifie que g n'est pas linéaire.
• *Soient $u_1 = (x_1, y_1), u_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors on a :*

$$
\begin{aligned}
f(\lambda \cdot u_1 + \mu \cdot u_2) &= f(\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2; \lambda \cdot y_1 + \mu \cdot y_2) \\
&= (\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2 + \lambda \cdot y_1 + \mu \cdot y_2; \lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2 - \lambda \cdot y_1 - \mu \cdot y_2; \\
&\qquad 2\lambda \cdot y_1 + 2\mu \cdot y_2) \\
&= \lambda \cdot (x_1 + y_1; x_1 - y_1; 2y_1) + \mu \cdot (x_2 + y_2; x_2 - y_2; 2y_2) \\
&= \lambda \cdot f(u_1) + \mu \cdot f(u_2)\,.
\end{aligned}
$$

D'où f est linéaire.
• *Il est clair que la condition $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}^2, g(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot g(u)$ n'est pas vérifié si on prendre $\lambda = 2$ et $u = (1, -1)$. En effet, $g(2 \cdot (1, -1)) = (4, -4)$ tandis que $2 \cdot g((1, -1)) = (4, -2)$, ce qui montre que g n'est pas linéaire.*

Notation 2.1. *On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E.*

Quelque propriétés :
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors on a :
• $f(0_E) = 0_F$;
• $\forall u \in E, f(-u) = -f(u)$;
• $\forall u_i \in E, \forall \lambda_i \in \mathbb{K}$ avec $i \in \{1, ..., p\}$, $f(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot u_i) = \sum_{i=1}^{p} f(\lambda_i \cdot u_i)$.

Remarque 2.1. *La dernière propriété est une propriété caractéristique pour les applications linéaires.*

Définition 2.3. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que f est un :*
• ***Endomorphisme*** *si $F = E$ (c.à.d $f \in \mathcal{L}(E)$).*
• ***Isomorphisme*** *si elle est bijective.*
• ***Automorphisme*** *si elle est bijective et $F = E$.*
• ***Forme linéare*** *si $F = \mathbb{K}$, i.e., $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.*

2.2. Image et noyau d'une application linéaire

Définition 2.4. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle*
• ***image*** *de f et on note $Im(f)$ le sous-espace vectoriel de F défini par :*

$$Im(f) = f(E) = \{f(x) \mid x \in E\};$$

• ***noyau*** *de f et on note $Ker(f)$ le sous-espace vectoriel de F défini par :*

$$Ker(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}.$$

Remarque 2.2. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Pratiquement, pour déterminer*
• *l'image de f, on détermine les valeurs prises par f, i.e., les $y \in F$ tels qu'il existe $x \in E$ pour lequel $y = f(x)$.*
• *le noyau de f, on résout l'equation $f(x) = 0_F$ d'inconnue $x \in E$.*

Les deux sous-espaces vectoriels $Im(f)$ et $Ker(f)$ permettent de mesurer le caractère injectif ou surjectif de l'application f comme illustré dans la proposition suivante.

Proposition 2.1. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*
• *f est surjective si et seulement si $Im(f) = F$.*
• *f est injective si et seulement si $Ker(f) = \{0_E\}$.*

Démonstration. • La caractérisation de la surjectivité est une simple traduction des définitions. Autrement dit, comme $Im(f) = f(E)$, le résultat est évident.
• ($\Rightarrow$) Supposons f injective. Soit $x \in Ker(f)$, alors $f(x) = 0_F = f(0_E)$. Comme f est injective on a alors $x = 0_E$, ce qui implique $Ker(f) = \{0_E\}$.
($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que $Ker(f) = \{0_E\}$. Soient $x_1, x_2 \in E$ deux éléments de E tels que $f(x_1) = f(x_2)$. On utilise la linéarité de f nous obtenons alors $f(x_1 - x_2) = 0_F$, ce qui implique que $(x_1 - x_2) \in Ker(f)$. Comme $Ker(f) = \{0_E\}$ on a donc $x_1 = x_2$. D'où f est injective. □

Exemple 2.2. *On considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, définie par $f : (x, y) \to (x + y, x - y, x + z)$.*
1- Déterminer l'image de f, son noyau.
2- f est elle injective ? surjective ?
• *Soit $Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Alors,*

$$\begin{aligned} Y \in Im(f) &\Leftrightarrow \exists X(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; (y_1, y_2, y_3) = f(x_1, x_2) \\ &\Leftrightarrow \exists X(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 - x_2 \\ y_3 = x_1 + x_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists X(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \begin{cases} x_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} \\ x_2 = \frac{y_1 - y_2}{2} \\ y_1 - y_3 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que $Im(f) = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3; y_1 - y_3 = 0\}$.
• *Soit $X(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors,*

$$\begin{aligned} X(x_1,x_2)\in Ker(f) &\Leftrightarrow f(x_1,x_2)=(0,0,0)\\ &\Leftrightarrow \exists X(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;\begin{cases}x_1+x_2=0\\ x_1-x_{2=0}\\ x_1+x_2=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x_1+x_2=0\\ 2x_1=0.\end{cases}\end{aligned}$$

On en déduit que $Ker(f)=\{(0,0)\}$.
Pour l'injectivité et la surjectivité de f*, on peut utiliser la Proposition 2.1.*
- *On a* $Ker(f)=\{(0,0)\}$*, alors* f *est injective.*
- *On a* $Im(f)=\{(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3; y_1-y_3=0\}\neq\mathbb{R}^3$*. En particulier,* $(1,2,3)\notin Im(f)$*, alors* f *n'est pas surjective.*

2.3. Applications linéaires en dimension finie

Proposition 2.2. *Soient* $f,g\in\mathcal{L}(E,F)$ *où* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et,* $e_1,e_2,...,e_n$ *;* n *vecteurs de* E *tel que* n *un entier naturel non nul* ($n\in\mathbb{N}^*$).
Si $A=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ *est une base de* E*, alors*

$$\forall p\in\mathbb{N}^*, f(e_p)=g(e_p)\Leftrightarrow \forall x\in E, f(x)=g(x)\,.$$

Démonstration. ($\Rightarrow$) On a la famille A engendre E, donc
$\forall x\in E, \exists\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in\mathbb{K}; x=\sum_{i=1}^n\alpha_i\cdot e_i$. En utilisant la linéarité de f et g, on obtient :

$$f(x)=\sum_{i=1}^n\alpha_i\cdot f(e_i)\text{ et }g(x)=\sum_{i=1}^n\alpha_i\cdot g(e_i)\,.$$

Alors, si on suppose que $\forall p\in\mathbb{N}^*, f(e_p)=g(e_p)$, nous concluons que

$$\forall x\in E, f(x)=g(x).$$

($\Leftarrow$)est bien clair. □

Remarque 2.3. *Si deux applications linéaires de* E *vers* F *(deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels) coïncident sur une base de* E*, alors elles sont égales.*

Exemple 2.3. *Soit* $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ *telle que* $f(e_1)=(2,1)$ *et* $f(e_2)=(-1,-1)$ *avec* $\{e_1=(1,0),e_2=(0,1)\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^2$ *et* $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.
Donner l'expression de f.
On a $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,(x,y)=x(1,0)+y(0,1)$*. Donc,* $f(x,y)=f(x(1,0)+y(0,1))$.

Comme f est linéaire alors $f(x,y) = xf(1,0) + yf(0,1) = x(2,1) + y(-1,-1) = (2x-y, x-y)$. Ainsi l'expression de f en tous points (x,y) de $\mathbb{R}^2$ est de la forme : $f(x,y) = (2x-y, x-y)$.

Proposition 2.3. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et, $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On a donc : si $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est une base de E, alors $\{f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)\}$ est une famille génératrice de $Im(f)$, c'est-à-dire $Im(f) = vect(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$.*

Remarque 2.4. *La Proposition ci-dessus fournit une méthode pour construire une base de $Im(f)$. En effet, soit $A = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E. Alors, $B = \{f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)\}$ est une famille génératrice de $Im(f)$. Il suffit alors d'extraire de B une base de $Im(f)$ (en utilisant le théorème de la base incomplète).*

2.3.1. Théorème du rang

Théorème 2.1 (Théorème du rang)**.** *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et, $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors on a l'égalité :*

$$dim(E) = dim(Im(f)) + dim(ker(f))\,.$$

Démonstration. Posons $dim(E) = n$ et $dim(Ker(f)) = m$.
On montre que $dim(Im(f)) = n - m$. En effet, soit $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ une base de $ker(f)$ et $\{v_1, v_2, ..., v_{n-m}\}$ une famille de vecteurs de E telle que $\{u_1, u_2, ..., u_m\} \cup \{v_1, v_2, ..., v_{n-m}\}$ soit une base de E. On pose $B = \{f(v_1), f(v_2), ..., f(v_{n-m})\}$ et nous montrons que B est une base de $Im(f)$.
• B engendre $Im(f)$:
Soit $y = f(x) \in Im(f)$ et $x \in E$. On a donc x s'écrit de manière unique ; $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot u_i + \sum_{i=1}^{n-m} \beta_i \cdot v_i$. Par linéarité de f et le fait que $u_i \in ker(f)$ pour tout $i \in \{1, 2, .., m\}$, on obtient que y est combinaison linéaire des $f(v_i)$ pour tout $i \in \{1, 2, .., n-m\}$, ce qui implique que B engendre $Im(f)$.
• B est une famille libre de F :
Soient $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-m} \in \mathbb{K}$ tel que $\sum_{i=1}^{n-m} \gamma_i \cdot f(v_i) = 0$. Par linéarité de f on en déduit que $\sum_{i=1}^{n-m} \gamma_i \cdot v_i \in ker(f)$. Donc il existe $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_m \in \mathbb{K}$ tel que $\sum_{i=1}^{n-m} \gamma_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^{m} \delta_i \cdot u_i$. Or la famille $\{u_1, u_2, ..., u_m, v_1, v_2, ..., v_{n-m}\}$ est libre, alors on en conclus que $\gamma_1 = \gamma_2 = ... = \gamma_{n-m} = 0$ et par conséquent B est libre. □

Définition 2.5 (Rang d'une application linéaire)**.** *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et, $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle rang de f , noté $rg(f)$, la dimension de $Im(f)$, i.e.,*

$$rg(f) = dim(Im(f))\,.$$

Remarque 2.5. *Si $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est une base de E, on sait que $Im(f) =$*

$Vect(\{f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n\}))$ *et on a aussi :*

$rg(f) = dim(Im(f)) = dim(Vect(\{f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)\})) = rg(\{f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)\}).$

Remarque 2.6. *Le théorème du rang s'écrit donc aussi sous forme*

$$rg(f) = dim(E) - dim(Ker(f)).$$

En particulier, le rang de f est toujours inférieur ou égal à la dimension de E.

2.3.2. Conséquences du théorème de rang

Parmi les applications du théorème du rang, elle permet de déterminer la relation entre les dimensions de E et F, comme le montre dans la proposition suivante.

Proposition 2.4. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et, $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*

(i) Si f est injective, alors $dim(E) \leq dim(F)$.

(ii) Si f est surjective, alors $dim(F) \leq dim(E)$.

(iii) Si f est bijective, alors $dim(F) = dim(E)$.

Théorème 2.2. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et que $dim(F) = dim(E)$. alors on a les équivalences suivantes :*

$$f \text{ est injective } \Leftrightarrow f \text{ est surjective } \Leftrightarrow f \text{ est bijective }.$$

Démonstration. Supposons que f est bijective, alors elle est injective. On a alors $Ker(f) = \{0_E\}$ et, d'aprés le théorème du rang, $dim(E) = rg(f) = dim(Im(f))$. Comme $Im(f) \subset F$ et que $dim(E) = dim(F)$, on en déduit que $Im(f) = F$ et par conséquent f est surjective. De même, si f est surjective, alors $dim(E) = rg(f)$ donc $dim(Ker(f)) = 0_{\mathbb{K}}$ et $Ker(f) = \{0_E\}$, ce qui implique que f est injective. Comme on l'a supposé surjective, on a montré qu'elle est bijective. □

Corollaire 2.1. *Le résultat du Théorème 2.2, s'applique en particulier aux endomorphismes. Autrement-dit, si $f \in \mathcal{L}(E)$. On les équivalences suivantes :*

$$ker(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow Im(f) = E \Leftrightarrow f \text{ est bijective }.$$

Exemple 2.4. *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, definie par : $f(x, y) = (x + y, x - y)$. Déterminer $Im(f)$ l'image de f. que peut-on conclure ?*

$$\begin{aligned} Im(f) &= \{f(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x + y, x - y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1, 1) + y(1, -1) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= Vect(u_1, u_2), \end{aligned}$$

avec $u_1 = (1,1)$ et $u_2 = (1,-1)$. Comme u_1 et u_2 sont libre, alors $dim(Im(f)) = 2 = dim(\mathbb{R}^2)$, i.e., $Im(f) = \mathbb{R}^2$. Cela implique que f est surjective. Puisque $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ telle que la dimension de $\mathbb{R}^2$ est fini, et que f est surjective on en déduit que f est bijective. De même, on en déduire aussi que f est injective, ce qui veut dire que $Ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

2.4. La composée des applications linéaires

Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ où E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors,

$$g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)\,.$$

Démonstration. Soient u_1, u_2 des vecteurs de E et λ, μ des scalaires de $\mathbb{K}$. En appliquant la linéarité de f et de g respectivement, on obtient :

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\lambda \cdot u_1 + \mu \cdot u_2) &= g(f(\lambda \cdot u_1 + \mu \cdot u_2)) \\ &= g(\lambda \cdot f(u_1) + \mu \cdot f(u_2)) \\ &= \lambda \cdot g(f(u_1)) + \mu \cdot g(f(u_2)) \\ &= \lambda \cdot (g \circ f)(u_1) + \mu \cdot (g \circ f)(u_2).\end{aligned}$$

D'où l'application $g \circ f$ est linéaire. □

Propriétés :
Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, $f, f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g, g_1, g_2 \in \mathcal{L}(F,G)$ on a :
- $g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$;
- $(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$;
- $(\lambda \cdot g) \circ f = \lambda \cdot (g \circ f) = g \circ (\lambda \cdot f)$.

Exemple 2.5. *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, definie par : $f(x,y) = (x+y, x-y)$. Déterminer $f \circ f$.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a :*

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x,y) &= f(f(x,y)) \\ &= f(x+y, x-y) \\ &= ((x+y)+(x-y), (x+y)-(x-y)) \\ &= (2x, 2y) = 2Id_{\mathbb{R}^2}.\end{aligned}$$

2.5. Inverse d'une Application Linéaire bijective

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Lorsque f est bijective, tous $y \in F$ possède un anticédent unique x par f dans E.

Définition 2.6. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et, $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*
• *On dit que f est inversible si, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution $x \in E$. Autrement dit, si f est bijective.*
• *Si f est inversible, alors f admet une bijection réciproque notée f^{-1}, où $f^{-1} : F \to E$ est définie par $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.*

La définition de l'application f^{-1} justifié le résultat suivant.

Proposition 2.5. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ inversible. On a donc :*

$$f \circ f^{-1} = Id_F \text{ et } f^{-1} \circ f = Id_E$$

Exemple 2.6. *On considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de $\mathbb{R}$-espace vectoriel, définie par :*
$f(x, y, z) = (x + y, y, x - 2z)$. Prouvez que f est inversible et déterminer f^{-1}.
Soit $Y = (y_1, y_2, y_3) \in F = \mathbb{R}^3$ tel que $Y = f(X)$. Nous résolvons cette équation avec l'inconnu $X = (x_1, x_2, x_3)$. On a :

$$\begin{aligned} Y = f(X) \quad &\Leftrightarrow \quad (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + x_2, x_2, x_1 - 2x_3) \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_1 - 2x_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2 - y_3). \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que l'équation $Y = f(X)$ admet une unique solution $X \in E = \mathbb{R}^3$ de la forme $X = (y_1 - y_2, y_2, \frac{1}{2}(y_1 - y_2 - y_3))$, pour tout $Y = (y_1, y_2, y_3) \in F = \mathbb{R}^3$. Cela signifie que f est inversible et, sa réciproque $f^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est définie par : $f^{-1}(x, y, z) = (x - y, y, \frac{1}{2}(x - y - z))$.

Propriétés :
• Soit f un isomorphisme de E dans F. Alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.
• En particulier, soit f un automorphisme de E. Alors f^{-1} est un automorphisme de E.
• Soient f et g deux automorphismes de E. Alors $g \circ f$ est un automorphisme de E et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Preuve de la linéarité de l'application f^{-1} :
par définition on a : $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$. Soit y_1 et y_2 deux éléments

de F et λ est un élement de $\mathbb{K}$. Soit $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$. On a donc : $f^{-1}(\lambda \cdot y_1 + y_2) = f^{-1}(\lambda \cdot f(x_1) + f(x_2))$. Comme f est linéaire, alors, $f^{-1}(\lambda \cdot f(x_1) + f(x_2)) = f^{-1}(f(\lambda \cdot x_1 + x_2))$. En appliquant la définition de f^{-1}, on obtient :
$f^{-1}(f(\lambda \cdot x_1 + x_2)) = \lambda \cdot x_1 + x_2 = \lambda \cdot f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2)$, ce qui prouve que $f^{-1}(\lambda \cdot y_1 + y_2) = \lambda \cdot f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2)$.

2.6. Exercices

Exercice 2.1. *On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par ;*
$f(x, y, z) = (x + y + z, 2x + y - z)$.
1- montrer que f est linéaire.
2- Déterminer $ker(f)$.

Exercice 2.2. *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par ; $f(x, y, z) = (x + y, x + z, x + y + z)$.*
1- Déterminer $ker(f)$ le noyau et en déduire $dim(ker(f))$.
2- Étudier l'injectivité, surjectivité et la bijectivité de f.
3- Donner $dim(Im(f))$; puis donner une base de $Im(f)$.

Exercice 2.3. *1- Vérifier que $\{(1, 1), (2, 1)\}$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.*
2- Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, telle que $f(1, 1) = (3, 0)$ et $f(2, 1) = (5, 1)$. Donner alors l'expression de f.

Exercice 2.4. *On considère $\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par ; $f(x, y, z) = (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y)$.
1- Montrer qu'il existe un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$, non nul, tel que $ker(f) = vect(u)$ et, déterminer un vecteur qui convient.
2- Soit $v = e_1 + e_2$ et $w = e_2 - e_3$.
(a) calculer $f(v)$ et $f(w)$.
(b) En déduire que $\{v, w\}$ est une base de $Im(f)$.
On pourra utiliser une autre méthode.
3- Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant $Im(f)$.
4- A-t-on $ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$?

3 Matrices

Ce chapitre propose un outil de calcul très pratique est-ce les matrices. Dans ce contexte, et après avoir fourni une présentation générale concernant les matrices, que ce soit des définitions ou des propriétés, nous allons voir que dans le cas des espaces vectoriels de dimension finie, l'étude des applications linéaires se ramène à l'étude des matrices. Autrement-dit, étant donné une application linéaire, et des bases pour les espaces vectoriels de départ et d'arrivée, on associe une matrice. Réciproquement, à une matrice on peut associe une application linéaire. Cela, confirme qu'il existe un lien étroit entre les matrices et les applications linéaires.

Dans ce chapiter, nous considérons tous les espaces vectoriels sont des espaces de dimensions finies sur le même corps commutatif $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.1. Définitions et exemples

3.1.1. Matrices

Définition 3.1 (Matrice)**.** *Soient n et m deux entiers naturels non nuls. On appelle matrice de type (n,p) où à n lignes et m colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$, toute famille $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ d'éléments de $\mathbb{K}$. La matrice A est généralement représentée sous la forme d'un tableau à n lignes et m colonnes comme suit :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

On la note aussi $A = (a_{ij})$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la taille de A, où $a_{ij} \in \mathbb{K}$ est l'élément correspondant à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne de A. L'ensemble des matrices de type (n,m) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté par $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.

Exemple 3.1. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

A est une matrice de type $(3,2)$ des éléments dans $\mathbb{R}$. Autrement-dit, $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$. l'élement a_{22} se trouve dans la deuxième ligne et la deuxième colonne, où $a_{22} = 3$.

Définition 3.2. *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.*
• *Si $n = m = 1$, la matrice A de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$ est uni-coefficient. Elle est de la forme (a). Il est usuel d'identifier cette matrice et son coefficient $a \in \mathbb{K}$.*
• *Si tous les coefficients de A sont nul, alors elle est appelée matrice nulle et notée $0_{n,m} = (0)$.*
• *Si $n = 1$ et m quelconque, la matrice A de $\mathcal{M}_{1,m}(\mathbb{K})$ est appelée matrice ligne. Elle est de la forme*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_m \end{pmatrix}.$$

Il est usuel d'identifier cette matrice au m uplet $(a_1, a_2, ..., a_m)$.
• *Si n quelconque et $m = 1$, la matrice A de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est appelée matrice colonne. Elle est de la forme*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, il est usuel aussi d'identifier cette matrice au n uplet $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Définition 3.3 (Egalité de deux matrices)**.** *Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. On dit que $A = B$ si tous les éléments de A sont égaux au éléments correspondants de B, i.e.,*

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\}, \forall j \in \{1, 2, ..., m\}; a_{ij} = b_{ij}.$$

Exemple 3.2. *On définit deux matrices A et B par :*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & 1 \\ -1 & \beta \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de α et β pour que les deux matrices soient égales.
En effet, $(A = B) \Leftrightarrow (\alpha + \beta = 3$ et $\beta = 2)$, d'où $(\alpha = 1$ et $\beta = 2)$.

3.1.2. Transposée d'une matrice

Définition 3.4 (Transposition)**.** *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.*
On appelle transposée de A, la matrice (a_{ji}) de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et on note A^t, i.e.,

$$A^t = (a_{ji}).$$

Exemple 3.3. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{5} & 4 & 0 \end{pmatrix}$. *Alors*

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \\ -3 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Propriété :
Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Alors on a :

$$(A^t)^t = A\,.$$

3.1.3. Matrices carrées

Définition 3.5 (Matrice carrée)**.** *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.
Si $m = n$, alors A est appelée matrice carrée. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n est noté par $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ ou simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Exemple 3.4. *La matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ *est une matrice carrée d'ordre* 2.

Définition 3.6 (Matrice diagonale)**.** *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
- *Les éléments a_{ii} s'appellent les coefficients diagonaux de A.*
- *La famille $(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$ est appelée diagonale principle de A.*
- *Une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite matrice diagonale lorsquelle ses coefficients non diagonaux sont nuls. Une telle matrice est de la forme :*

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Définition 3.7 (La trace d'une matrice)**.** *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
La trace de A est le nombre dans $\mathbb{K}$, notée $Tr = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$.*

Définition 3.8 (Matrice symétrique)**.** *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que A est symétrique si et seulement si $A = A^t$.*

Définition 3.9 (Matrice triangulaire)**.** *Soit $T = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
- *On dit que T est* ***triangulaire supérieure*** *si tous les coefficients en dessous de*

la diagonale sont nuls. Donc, elle est de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .. & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & .. & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_{nn-1} \\ 0 & 0 & .. & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

• *On dit que T est* ***triangulaire inférieure*** *si tous les coefficients en dessus de la diagonale sont nuls. Alors, elle est de la forme :*

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & .. & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & .. & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Remarque 3.1. *L'intersection de l'ensemble des matrices triangulaires supérieures avec l'ensemble des matrices triangulaires inférieures de même type (n, n), est égale à l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n.*

Définition 3.10 (Matrice identité)**.** *On appelle matrice identité d'ordre n, la matrice carrée d'ordre n dont les éléments de la diagonale sont égaux à 1 et tous les autres sont égaux à 0. On la note I_n. On écrit,*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.2. Opérations sur les matrices

3.2.1. Somme de deux matrices

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.
La somme de A et B est la matrice notée $A + B$ de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ définie par :

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & ... & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & ... & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & ... & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.5. *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Alors on a :

$$A + B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Remarque 3.2. *On ne somme que des matrices de même type.*

3.2.2. Multiplication par un scalaire

Soient $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Le produit de A par λ est la matrice notée $\lambda \cdot A$ de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & ... & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & ... & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & ... & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.6. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. *Alors,*

$$2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Définition 3.11 (Opposition d'une matrice)**.** *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. L'opposée de A est la matrice de type (n, m) notée $-A$ telle que*

$$-A = (-a_{ij}).$$

Définition 3.12 (Antisymétrique d'une matrice). *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. On dit que*

$$A \text{ est antisymétrique si et seulement si } -A = A^t \,.$$

Propriété :
Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors on a :

$$(A+B)^t = A^t + B^t \text{ et } (\alpha \cdot B)^t = \alpha \cdot B^t \,.$$

Espace vectoriel des matrices :

Théorème 3.1. *En munissant l'ensemble $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ par les deux opération :*
• " + " *addition des matrices (loi interne),*
• " $\cdot$ " *multiplication d'une matrice par un scalaire (loi externe).*
Alors, $(\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont le vecteur nul est la matrice nulle $0_{n,m}$.

3.2.3. Produit de matrices

Définition 3.13 (Produit de deux matrices). *Soient $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$. Le Produit de A par B est la matrice $C = A \times B$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par :*

$$\forall i \in \{1,2,...,n\}, \forall j \in \{1,2,...,p\}; C = (c_{ij}) \text{ avec } c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \,.$$

Exemple 3.7. *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$A \times B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -3 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 3.3. *Pour qu'une multiplication de deux matrices soit possible, il est nécessaire que le nombre de lignes de la deuxième soit égal au nombre de colonnes de la première.*

Règle générale :
Soient A, B et C trois matrices. Alors, on a :

$$A \text{ de type } (n,m) \times B \text{ de type } (m,p) = C \text{ de type } (n,p) \,.$$

Propriété :
La multiplication de deux matrices n'est pas toujours commutative, lorsqu'il est possible de calculer les deux produits.

Exemple 3.8. *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } B \times A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, nous voyons bien que $A \times B \neq B \times A$.

Proposition 3.1. *Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ et $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec n, m et p trois entiers naturels non nuls, et soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors on :*
- $A + B = B + A$.
- $(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$ *et* $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$.
- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.
- $A \times I_m = A$ *et* $I_n \times A = A$.
- $\alpha \cdot (A \times B) = (\alpha \cdot A) \times B = A \times (\alpha \cdot B)$.

Définition 3.14 (Puissance d'une matrice)**.** *Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et k un entier naturel non nul. On note $A^0 = I_n$, $A^1 = A$, $A^2 = A \times A$ et $A^k = A \times A \times ... \times A$($k$ termes). Cette matrice A^k, c'est la puissance $k^{ème}$ de A.*

Exemple 3.9. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Alors, $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^1 = A$,

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Anneau de matrices carrées :

Théorème 3.2. *En munissant l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par les deux lois :*
- " $+$ " *addition des matrices,*
- " $\times$ " *multiplications de matrices.*

Alors, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ *est une structure d'anneau unitaire, mais n'est pas commutative.*

3.2.4. Inverse d'une matrice carrée

Définition 3.15. *Soit* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *On dit que* A *est inversible (régulière) s'il existe une matrice* B *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *telle que* $A \times B = B \times A = I_n$. *Si tel est le cas, la matrice* B *est unique et est appelée matrice inverse de* A. *De plus, elle est notée* A^{-1}.
- Si la matrice carée A *n'est pas inversible, on dit qu'elle est singulière.*

Notation 3.1. *On note* $GL_n(\mathbb{K})$ *l'ensemble des matrices inversible d'ordre* n.

Exemple 3.10. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On montre que A *est inversible et ceci en cherchant la matrice* $B = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$ *telle que* $A \times B = B \times A = I_2$.
En effet,

$$\begin{aligned} A \times B = I_2 \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x & z \\ x+2y & z+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ z = 0 \\ x + 2y = 0 \\ z + 2t = 1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad (x = 1, y = \frac{-1}{2}, z = 0, t = \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

De même resultat pour l'équation $B \times A = I_2$. *Alors,* A *est inversible et sa matrice inverse est* $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Propriétés :
Soient $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors on a :
• $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
• $(A^{-1})^{-1} = A$.
• $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.

3.3. Déterminant d'une matrice carrée

3.3.1. Définition et propriétés admises

Définition 3.16. *Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle déterminant, l'unique application notée* " det " *définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ comme suit :*
• *Pour $n = 1$; A est une matrice uni-coefficient, i.e., $A = (a)$ avec $a \in \mathbb{K}$,* $\det(A) = a$.
• *Pour $n > 1$;* $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$, *pour j fixe dans certain valeur entre 1 et n, où A_{ij} est la matrice obtenue à partir de A, en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. Son déterminant i.e.* $\det(A_{ij})$ *s'appelle le mineur de (a_{ij}) dans A et le nombre $(-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$ est appelé cofacteur de (a_{ij}) dans A.*

Remarque 3.4. *Pour le calcule de* $\det(A)$, *on peut utiliser la formule précédente, mais suivant la $i^{\text{ème}}$ ligne, i.e.,*
$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$, *pour i fixe dans certain valeur entre 1 et n.*

Notation 3.2. *On note aussi par $\mid A \mid$ le déterminant de la matrice A.*

Exemple 3.11. *Soit $A = (-3)$. Alors,* $\det(A) = -3$.

Exemple 3.12. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. *Alors,* $\det(A) = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$.

Exemple 3.13. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. *Alors,* $\det(A) = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$.
On fixe $j = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1}) \\
&= (-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) + (-1)^{2+1} a_{21} \det(A_{21}) + (-1)^{3+1} a_{31} \det(A_{31}) \\
&= a_{11} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - a_{21} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + a_{31} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 1 \times 4 - 3 \times 2 + 0 = -2.
\end{aligned}$$

Propriétés :
Soient $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et p un entier naturel non nul. Alors on a :
• Si tous les éléments d'une colonne (ou ligne) sont nuls, alors $\det(A) = 0$.
• Si deux colonnes (ou deux lignes) sont proportionnelles (ou identiques) alors, $\det(A) = 0$.

Exemple 3.14. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$. *Alors,* $\det(A) = 0$. *De même pour*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & -4 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

• Si aux éléments d'une ligne (ou colonne) on ajoute p fois les éléments correspondants d'une autre colonne (ou ligne), la valeur du déterminant reste inchangée.

Remarque 3.5. *Cette propriété est utilisée pour faire apparaître des zéros sur une colonne (ou ligne), dans le but de faciliter le calcul de déterminant.*

Exemple 3.15. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 4 & 6 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. *Alors,*

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 9+3(-3) & -3 \\ 4 & 6+3(-2) & -2 \\ -3 & 1+3(5) & 5 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -3 & 16 & 5 \end{pmatrix} = \det(B). \end{aligned}$$

Développement du déterminant suivant la $j^{\text{ème}}$ *colonne pour* $j = 1$.

$$\begin{aligned} \det(B) &= \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1}) \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) + (-1)^{2+1} a_{21} \det(A_{21}) + (-1)^{3+1} a_{31} \det(A_{31}) \\ &= \det \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 16 & 5 \end{pmatrix} - 4 \det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 16 & 5 \end{pmatrix} - 3 \det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \\ &= 32 - 4(48) = 32 - 192 = -160. \textit{ Donc,} \\ \det(A) &= \det(B) = -160. \end{aligned}$$

Illustration :
Pour faire apparaître deux zéros, on a ajouté à la $2^{\text{ème}}$ *colonne,* 3 *fois la* $3^{\text{ème}}$ *colonne.*

• Si l'on permute les colonnes et les lignes, la valeur du déterminant reste inchangée, i.e. $\det(A^t) = \det(A)$.
• Si l'on permute deux colonnes (ou deux lignes), le déterminant change de signe.

Exemple 3.16. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. *On a :* $\det(A) = 14$. *Alors que,*

$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = -14.$

• Si A est une matrice triangulaire supérière, ou triangulaire inférière ou digonale, alors le déterminant est égal au produit des coefficients diagonaux, i.e., $\det(A) = a_{11}a_{22}...a_{nn}$.

Exemple 3.17. *Si* $A = I_n$ *(matrice identité), alors* $\det(A) = 1$.

• Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,alors

$$\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B) = \det(B) \times \det(B).$$

• Si on multiplie une colonne (ou ligne) d'une matrice par un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$, le déterminant de la nouvelle matrice est multiplié par α.
• Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors $\det(\alpha \cdot A) = \alpha^n \cdot \det(A)$.

Exemple 3.18. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$.
Alors $\det(A) = 2$, *tandis que* $\det(B) = 4 = 2\det(A)$ *et* $\det(C) = 8 = 2^2\det(A)$.

Illustration :
- Pour B : nous multiplions seulement une ligne de A par 2.
- Pour C : nous multiplions A par 2.

• Déterminant d'une somme de matrices :
Pour exprimer le déterminant d'une somme de matrices, il n'y a pas de formule simple comme nous l'avons vu pour la multiplication, mais à cet égard peut confirmer que généralement, $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Exemple 3.19. *Soient* $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$, *avec* $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.
Alors, $\det(A+B) = \det(0_2) = 0$, *tandis que* $\det(A)+\det(B) = \lambda^2+\lambda^2 = 2\lambda^2 \neq 0$.

Théorème 3.3 (Théorème fondamental)**.** *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *alors*

$$A \textit{ est inversible } \Leftrightarrow \det(A) \neq 0\,.$$

Proposition 3.2. *Si* A *est inversible, alors*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}\,.$$

Proposition 3.3 (Calcul de l'inverse par le déterminant)**.** *Soit* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

et i, j deux entiers naturels non nuls.

$$\text{Si } A \text{ est inversible, alors } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t .$$

$C = (c_{ij}) = (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$, *où C est la matrice de cofacteurs (comatrice).*

Exemple 3.20. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -3 & 16 & 5 \end{pmatrix}$.

1- Montrer que A est inversible.
2- Déterminer A^{-1}.
• *On a vue d'après l'Exemple 3.15 que* $\det(A) = -160 \neq 0$. *Alors, on en déduit que A est inversible.*
• *Pour la détermination de A^{-1}, on a* $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t$.

On détermine d'abord la matrice de cofacteurs $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$. *On a :*

La $1^{\text{ère}}$ ligne :
$c_{11} = (-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) = \det \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 16 & 5 \end{pmatrix} = 32.$
$c_{12} = (-1)^{1+2} a_{11} \det(A_{12}) = 0.$
$c_{13} = (-1)^{1+3} a_{13} \det(A_{13}) = (-3) \det \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 16 \end{pmatrix} = -192.$

La $2^{\text{ème}}$ ligne :
$c_{21} = (-1)^{2+1} a_{21} \det(A_{21}) = (-1)(4) \det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 16 & 5 \end{pmatrix} = -192.$
$c_{22} = (-1)^{2+2} a_{22} \det(A_{22}) = 0.$
$c_{23} = (-1)^{2+3} a_{23} \det(A_{23}) = (-1)(-2) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 16 \end{pmatrix} = (2)(16) = 32.$

La $3^{\text{ème}}$ ligne :
$c_{31} = (-1)^{3+1} a_{31} \det(A_{31}) = (1)(-3) \det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 0.$
$c_{32} = (-1)^{3+2} a_{32} \det(A_{32}) = (-1)(16) \det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = (-16)(10) = -160.$
$c_{33} = (-1)^{3+3} a_{33} \det(A_{33}) = (1)(5) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = 0.$

On a donc, $C = \begin{pmatrix} 32 & 0 & -192 \\ -192 & 0 & 32 \\ 0 & -160 & 0 \end{pmatrix}$. *On en déduit que*

$$A^{-1} = -\frac{1}{160}\begin{pmatrix} 32 & -192 & 0 \\ 0 & 0 & -160 \\ -192 & 32 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

3.3.2. Calcul du déterminant par la méthode du pivot de Gauss

Nous avons vu précédemment que le déterminant d'une matrice triangulaire supérière est égal seulement au produit des coefficients diagonaux.
La méthode du pivot de Gauss (aussi appelée élimination de Gauss-Jordan) consiste d'abord à amener une matrice donnée à une matrice triangulaire supérieure, ceci uniquement par opérations élémentaires sur les lignes. Ces opérations sont :
1- Échange de deux lignes.
2- Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul.
3- Ajout du multiple d'une ligne à une autre ligne.

Le principe de cette méthode est comme suit :
• on choisit dans la matrice A un terme (scalaire de $\mathbb{K}$) non nul a_{ij}, en général le premier terme en haut à gauche, que l'on appelle le **pivot** ;
• si le terme a_{11} ne convient pas de choisir, on peut, en permutant les lignes 1 et i (les colonnes 1 et j), le mettre à la bonne position. On obtient alors une matrice B telle que $\det(A) = (-1)^{i+j}\det(B)$;
• on élimine tous les termes situés sous le pivot, a_{11}. la valeur du déterminant reste inchangée par cette opération ;
• on répète ensuite le même processus dans la sous-matrice privée de sa première ligne et de sa première colonne ;
• à la dernière étape on obtient alors une matrice triangulaire dont le déterminant est égal, au signe près, au déterminant de la matrice donnée.

Exemple 3.21. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.
Calculer le déterminant de A par la méthode du pivot de Gauss.
En effet, on note par L_1, L_2, L_3 les lignes de la matrice A.
Étape (1) *:*
On a : $a_{11} = 2 \neq 0$. Donc, on peut choisir 2 comme premier pivot et ajouter ainsi à L_2, la première ligne L_1 multipliée par $\frac{-3}{2}$, i.e., $(L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2}\cdot L_1)$ et ajouter à la ligne L_3, la première L_1 multipliée par -2, i.e., $(L_3 \leftarrow L_3 - 2\cdot L_1)$. Alors on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Étape (2) :
La deuxième pivot est $\frac{3}{2}$. Ajouter ainsi à la ligne L_3, la deuxième L_2 multipliée par -2, i.e., $(L_3 \leftarrow L_3 - 2 \cdot L_2.)$ Alors on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

La troixième pivot est $4 \neq 0$, où la matrice est triangulaire supérière.
Le déterminant de A est égal au produit des pivots, i.e.,

$$\det(A) = 2 \times \frac{3}{2} \times 4 = 12.$$

3.4. Les matrices et les applications linéaires

3.4.1. La matrice associée à une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives m et n, $B = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ une base de E, $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ une base de F et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle matrice de f dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et on note $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ la matrice de la famille $f(\mathcal{B}) = \{f(v_1), f(v_2), ..., f(v_m)\}$ dans la base $\mathcal{B}'$. Autrement dit, $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est la matrice à n ligne et m colonne à coefficients dans $\mathbb{K}$, dont les éléments de la $j^{ème}$ colonne sont les coordonnées du vecteur $f(v_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$ où

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = (a_{ij}), \forall j \in \{1, 2, ..., m\}; f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot w_i = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}.$$

Notation 3.3. *Si $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ est simplement notée $M_{\mathcal{B}}(f)$.*

Exemple 3.22. *On considère E est un $\mathbb{K}$-espaces vectoriel de dimension finie n et, $\mathcal{B}$ est une base de E. Alors, $M_{\mathcal{B}}(Id_E) = I_n$.*

Exemple 3.23. *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par ;*
$f(x, y, z) = (-x + y - z, -x + z, -2x + 2y)$.
On considère $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$.
En effet, nous savons que $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1)\}$. Alors, $f(v_1) = (-1, -1, -2), f(v_2) = (1, 0, 2), f(v_3) = (-1, 1, 0)$ *et par conséquent*

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.24. *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ définie par ;*
$f(x, y, z) = (x + y, x - y)$.
On considère $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 2), v_2 = (-1, 1)\}$ une base de $\mathbb{R}^2$ (espace de départ) et $\mathcal{B}' = \{w_1 = (0, 2), w_2 = (-2, 1)\}$ une base de $\mathbb{R}^2$ (espace d'arrivée).
Quelle est la matrice associée à f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$?
D'abord, on calcule $f(v_1)$ et $f(v_2)$ comme combinaison linéaire de w_1 et w_2.
On pose ; $f(v_1) = \alpha_1 \cdot w_1 + \alpha_2 \cdot w_2, f(v_2) = \beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2$. On a donc,
$(3, -1) = (-2\alpha_2, -2\alpha_1 + \alpha_2), (0, -2) = (-2\beta_2, 2\beta_1 + \beta_2)$. On en déduit que $\alpha_1 = \frac{1}{4}, \alpha_2 = \frac{-3}{2}, \beta_1 = -1, \beta_2 = 0$ et par conséquent

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -1 \\ \frac{-3}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque 3.6. *En général, la matrice associée à une application linéaire dépend des bases choisies $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.*

3.4.2. Application linéaire associée à une matrice

Proposition 3.4. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives m et n, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ une base de E, $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ une base de F. Alors la donnée d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, donne une unique application linéaire f de E dans F, où $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.*

L'expression analytique de f :
On a : $\forall x \in E, \exists!(x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathrm{K}^m$; x=$\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot v_i$.
Etant donné la matrice $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

- Pour chaque $x \in E$, notons $X = M_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$.

- Pour chaque $y \in F$, notons $Y = M_{\mathcal{B}'}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Alors si $y = f(x)$, on a : $Y = A \times X$. Cette équation peut être écrite sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2m}x_m \\ \vdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nm}x_m. \end{cases}$$

On en déduit que l'application linéaire f associée à la matrice A est définie par :

$$f(x_1, x_2, ..., x_m) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m, ..., a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nm}x_m).$$

Exemple 3.25. *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, tous les deux (départ et d'arrivée) munis de la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_2 = (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Etant donné la matrice*

$$A = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

Donner l'expression analytique de f.
En effet, on a pour tous les réels x, y et z :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z \\ 3x - 2y \\ -x + \frac{y}{2} + 4z \end{pmatrix}.$$

Alors, l'application f associée à la matrice A est définie par :

$$f(x, y, z) = (x - z, 3x - 2y, -x + \frac{y}{2} + 4z).$$

Propriétés :
Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ où E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives m, n et p avec m, n, p Trois entiers naturels non nuls. Soient $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ une base de E, $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ une base de F et $\mathcal{B}'' = \{u_1, u_2, ..., u_p\}$ une base de G. Alors, on a :
• L'application $\varphi : f \to M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.
• $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie avec

$$dim(\mathcal{L}(E, F)) = dim(\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})) = m \times n = dim(E) \times dim(F).$$

• On considère $m = n$ et $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$. Alors on a :
f est un isomorphisme de E sur F si et seulement si A est inversible. de plus

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = A^{-1}.$$

• L'application $g \circ f$ est définie par :

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \times M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f).$$

Remarque 3.7. *L'ordre dans lequel s'effectue le produit est l'ordre dans lequel s'écrit la composition.*

Remarque 3.8. *Si la matrice de f est $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, et la matrice de g est $B = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, alors la matrice de $g \circ f$ est $C = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$.*

Exemple 3.26. *Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par : $f(x,y,z) = (x+y+2z, x-y)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ définie par : $f(x,y) = (x-y, 2x+y)$.*
Soient $\mathcal{B} = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = \mathcal{B}'' = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Déterminer l'application $g \circ f$.

Pour la détermination de $g \circ f$, il suffit de passer par l'intermédiaire des matrices.
On détermine d'abord la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g \circ f)$.
On a $M_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Donc,

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g \circ f) &= M_{\mathcal{B}'}(g) \times M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit que $(g \circ f)(x,y,z) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g \circ f) \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (2x+2z, 3x+y+4z)$.
Donc, $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par : $(g \circ f)(x,y,z) = (2x+2z, 3x+y+4z)$.

3.4.3. Matrice de passage

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni de deux bases $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ et $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$.

Définition 3.17. *On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice carrée $P = (p_{ij})$ dont la $j^{\text{ème}}$ colonne s'écrit dans la base $\mathcal{B}$ de la forme :*

$$\forall j \in \{1, 2, ..., n\}, w_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \cdot v_i \, .$$

Autrement dit, les colonnes de P sont les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ exprimées dans la base $\mathcal{B}$.

Notation 3.4. *On note parfois aussi la matrice P par $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ où $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.*

Proposition 3.5. *On considère l'endomorphisme identique de E, l'application $Id(E) : v \to Id(v) = v$. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors,*

$$P = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_E).$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_E) &= M_{\mathcal{B}}(Id_E(w_1), Id_E(w_2), ..., Id_E(w_n)) \\ &= M_{\mathcal{B}}(w_1, w_2, ..., w_n) \\ &= M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = P. \end{aligned}$$

Exemple 3.27. $P = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(Id_E) = I_n$.

Remarque 3.9. *Comme $f = Id_E$ est un isomorphisme de E sur E (automorphisme), alors P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est inversible et son inverse P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. Autrement dit :*

$$[M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_E)]^{-1} = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(Id_E).$$

Exemple 3.28. *Soient $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0), v_2 = (0,1)\}$ et $\mathcal{B}' = \{w_1 = (-1,2), w_2 = (2,3)\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$.*
1- Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
2- Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.
• On exprime les vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$:
On a

$$\begin{cases} w_1 = -v_1 + 2v_2 \\ \\ w_2 = 2v_1 + 3v_2. \end{cases}$$

Donc la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

• On exprime les vecteurs de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$:

On a

$$\begin{cases} v_1 = \frac{-3}{7}w_1 + \frac{2}{7}w_2 \\ \\ v_2 = \frac{2}{7}w_1 + \frac{1}{7}w_2. \end{cases}$$

Donc la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ *à* $\mathcal{B}$ *est* $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(Id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} \frac{-3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$.

Vérification : $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^2}) \times M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(Id_{\mathbb{R}^2}) = I_2$.

3.4.4. Changement de base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni de deux bases $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ et $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$.

Changement de base pour un vecteur

Théorème 3.4. *Soient* x *un élément de* E, X *et* X' *les matrices colonnes des coordonnées de* x *dans les bases* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *respectivement. Alors,*

$$X = P \times X'.$$

En effet, on a : $P = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_E)$, $X = M_{\mathcal{B}}(x)$ *et* $X' = M_{\mathcal{B}'}(x)$. *Alors,*

$$X = M_{\mathcal{B}}(x) = M_{\mathcal{B}}(Id_E(x)) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_E) \times M_{\mathcal{B}'}(x) = P \times X'.$$

Remarque 3.10. *La formule suivante peut également être extraite :* $X' = P^{-1} \times X$.

Changement de base pour une application linéaire

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie m, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Soient F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F et Q la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$.

Théorème 3.5. *Soient* $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ *et* $A' = M_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$. *Alors,*

$$A' = Q^{-1} \times A \times P.$$

En effet, soient $x \in E$, $X = M_{\mathcal{B}}(x)$ *et* $X' = M_{\mathcal{B}'}(x)$ *les matrices colonnes des coordonnées de* x *dans les bases* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *(resp.). Alors d'après Théorème 3.4, on obtient :* $X = P \times X'$.
De même, soient $y \in F$, $Y = M_{\mathcal{C}}(x)$ *et* $Y' = M_{\mathcal{C}'}(y)$ *les matrices colonnes des coordonnées de* y *dans les bases* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{C}'$ *(resp.). Donc, on a :* $Y = Q \times Y'$.

Alors, l'équation $y = f(x)$ peut écrite sous forme matricielle $Y = A \times X$ où

$$\begin{aligned} Y = A \times X \quad &\Leftrightarrow \quad Q \times Y' = A \times P \times X' \\ &\Leftrightarrow \quad Y' = Q^{-1} \times A \times P \times X'. \end{aligned}$$

Selon les données, la matrice A' est l'unique matrice telle que $y = f(x) \Leftrightarrow Y' = A' \times X'$. Ainsi, $A' = Q^{-1} \times A \times P$.

Corollaire 3.1 (Cas d'un endomorphisme)**.** *Si $f \in \mathcal{L}(E)$, $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = M_{\mathcal{B}'}(f)$. Alors,*

$$A' = P^{-1} \times A \times P\,.$$

Exemple 3.29. *Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et la matrice $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ définie par :* $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.
On considère $\mathcal{B}' = \{u_1 = (0,-1,1), u_2 = (1,-1,1), u_3 = (-1,1,-1)\}$ une autre base de $\mathbb{R}^3$.
1- Déterminer P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
2- Déterminer A' la matrice associée à f dans la base $\mathcal{B}'$.

• *La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\mathcal{B} = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$. On exprime les vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$ comme suit :*

$$\begin{cases} u_1 = -e_2 + e_3 \\ u_2 = e_1 - e_2 + e_3 \\ u_3 = -e_1 + e_2 - e_3. \end{cases}$$

Donc la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est

$$P = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$P^{-1} = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(Id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

• *A' la matrice associée à f dans la base $\mathcal{B}'$ est*

$$\begin{aligned} A' &= M_{\mathcal{B}'}(f) \\ &= P^{-1} \times A \times P \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Définition 3.18 (Matrices semblables)**.** *On dit que deux matrices A et A' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables s'il existe une matrice inversible P, i.e., $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que :*

$$A' = P^{-1} \times A \times P .$$

Exemple 3.30. *On considère E un $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors, les matrices $M_{\mathcal{B}}(f)$ et $M_{\mathcal{B}'}(f)$ sont semblables.*

Définition 3.19 (Matrices équivalentes)**.** *Soient $A, A' \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. On dit que A' est équivalente à A s'il existe deux matrices inversibles $P \in GL_m(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ pour lesquelles :*

$$A' = Q^{-1} \times A \times P .$$

Exemple 3.31. *On considère E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels non nuls de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}'}(f)$ et $M_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$ sont équivalentes.*

3.4.5. Rang d'une matrice

Définition 3.20. *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. On appelle rang de A, et on note $rg(A)$, le rang de ces vecteurs colonnes.*

Exemple 3.32. *Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Le rang de A est par définition le rang de la famille de ces vecteurs colonnes, i.e., le rang de la famille*

$$\mathcal{H} = \{u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} .$$

Il est clair que la famille $\{v_1, v_2\}$ est libre. D'autre part, après avoir résolu le système linéaire $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$, on obtient $v_1 - v_2 + v_3 = 0$. La famille $\mathcal{H}$ est donc liée. On en déduit que $Vect(v_1, v_2, v_3) = Vect(v_1, v_2)$. Donc, $rg(A) = rg(\mathcal{H}) = 2$.

La proposition suivante explique le lien entre le rang d'une application linéaire et le rang d'une matrice associée.

Proposition 3.6. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}'$ une base de F, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$. Alors,*

$$rg(f) = rg(A)\,.$$

En effet,

$$\begin{aligned} rg(A) &= rg(M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)) \\ &= rg(M_{\mathcal{B}'}(f(\mathcal{B}))) \\ &= rg(f(\mathcal{B})) = dim(Vect(f(\mathcal{B}))) \\ &= dim(Im(f)) = rg(f)\,. \end{aligned}$$

Maintenant, nous fournissons un critère d'inversibilité pour les matrices, peut l'obtenir en connaissant leur rang.

Théorème 3.6. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, A est inversible si et seulement si les matrices colonnes de A forment une base de $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Cela revient aussi à dire que*

$$A \text{ est inversible } \Leftrightarrow rg(A) = n\,.$$

Remarque 3.11. *En pratique, il est utile d'identifier $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}^n$. Alors, A est inversible si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une base de $\mathbb{K}^n$.*

Théorème 3.7 (Caractérisation)**.** *Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Alors,*

$$A \text{ et } B \text{ sont équivalentes } \Leftrightarrow rg(A) = rg(B)\,.$$

La proposition suivante explique l'invariance du rang par transposition.

Proposition 3.7. *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Alors,*

$$rg(A^t) = rg(A)\,.$$

Remarque 3.12. *Comme les vecteurs lignes d'une matrice ce sont les colonnes de sa transposée, alors déterminer le rang d'une matrice consiste à déterminer aussi le rang de ses vecteurs lignes.*

Proposition 3.8. *Soient $C_1, C_2, ..., C_n$ les colonnes d'une matrice A. Alors le rang de A n'est pas modifié par les trois opérations élémentaires suivantes sur les vecteurs ;*
1- On peut échanger deux colonnes ($C_i \leftrightarrow C_j$).
2- On peut multiplier une colonne par un scalaire non nul ($C_i \leftarrow \alpha \cdot C_i$, pour $\alpha \neq 0$).

3- On peut ajouter à la colonne C_i un multiple d'une autre colonne C_j. ($C_i \leftarrow C_i + \alpha \cdot C_j$).

3.5. Exercices

Exercice 3.1. *Soient les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1- Calculer $A + B, A - B, 2 \cdot A - 7 \cdot B$.
2- Calculer $A^t, B^t, (A \times B)^t$.
3- Calculer $A \times B, B \times A, A^3$.

Exercice 3.2. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $tr(A \times X) = tr(B \times X)$. Montrer que $A = B$.*

Exercice 3.3. *Que peut-on dire d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifier $tr(A \times A^t) = 0$?*

Exercice 3.4. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1- Calculer $P(A) = A^3 - 2 \cdot A^2 + 2 \cdot A$.
2- Déduire de ce qui précède que A est inversible, puis donner A^{-1}.
3- Retrouver A^{-1} par utilisation de la comatrice.

Exercice 3.5. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1- Calculer $(A - 2 \cdot I_3)^3$, puis en déduire que A est inversible.
2- Déterminer A^{-1} en fonction de I_3, A et de A^2.

Exercice 3.6. *Soit* $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, *avec $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1- Déterminer une matrice X telle que $A = \alpha \cdot I_3 + X$.
2- Calculer X^2, puis en déduire X^n, pour tout n entier.

Exercice 3.7. *Calculer le déterminant des matrices suivantes.*

$$A = \begin{pmatrix} \sin(x) & -\cos(x) \\ \cos(x) & \sin(x) \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.8. *Soient $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la base canonique est* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1- Montrer que $\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^3, f(x) = x\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera une base $\{v_1\}$.

2- On considère $v_2 = (0, 1, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Calculer $f(v_2)$ et $f(v_3)$.

3- Montrer que $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une autre base de $\mathbb{R}^3$.

4- Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

5- Calculer P^{-1}.

6- Déterminer la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.

7- Donner la relation entre A, P et D.

4 Résolution de systèmes d'équations

L'objectif de ce chapitre est principalement pratique. Il s'agit de savoir comment résoudre des systèmes d'équations linéaires, où l'intérêt sera d'étudier les systèmes linéaires de n équations à n inconnus.

4.1. Définitions

Définition 4.1 (Equation linéaire)**.** *On appelle équation linéaire dans les inconnues $x_1, x_2, ..., x_m$ toute relation de la forme*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m = b,$$

où $a_1, ..., a_m$ et b sont des scalaires donnés de $\mathbb{K}$ avec m un entier naturel non nul.

Définition 4.2 (Système d'équations linéaires)**.** *Soit n un entier naturel non nul. On appelle système de n équations linéaires à n inconnus à coefficients dans $\mathbb{K}$, toute n-liste d'équations de la forme :*

$$(S): \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

où les (x_j) sont les inconnues, les (a_{ij}) sont les coefficients, et les (b_i) les seconds membres du système. Tous ces éléments sont des scalaires de $\mathbb{K}$ avec $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Définition 4.3 (Solution du système)**.** *Une solution du système linéaire (S) est une liste de n scalaires $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ de $\mathbb{K}$, vérifiants les n équations de ce système. L'ensemble des solutions du système est l'ensemble de tous ces n-uplets.*

Remarque 4.1. *Un système d'équations linéaires n'a soit aucune solution, soit une seule solution, soit une infinité de solutions.*

Définition 4.4 (Incompatibilité)**.** *Un système linéaire qui n'a aucune solution est dit incompatible.*

Définition 4.5 (Equivalence des système)**.** *Deux systèmes sont dits équivalents s'ils ont les mêmes solutions.*

Définition 4.6 (Homogénéité du système)**.** *On dit qu'un système est homogène, si tout les second membre sont nuls.*

Définition 4.7 (Rang d'un système)**.** *Le rang du système linéaire (S) est le rang* *de la matrice* (a_{ij}), *où* $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

4.2. Forme matricielle du système

• Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Alors, (S) s'écrit matriciellement sous la forme : $A \times X = B$, i.e.,

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

• Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$, A la matrice associée à f dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $X = (x_1, x_2, ..., x_n), B = (b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{K}^n$, alors (S) devient sous la forme : $f(X) = B$, i.e.,

$$(S) \Leftrightarrow f(x_1, x_2, ..., x_n) = (b_1, b_2, ..., b_n).$$

Remarque 4.2. *Résoudre le système* (S), *consiste à trouver un vecteur* $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *tel que* $A \times X = B$ *ou un vecteur* $X \in \mathbb{K}^n$ *tel que* $f(X) = B$.

Exemple 4.1. *On considère le système*

$$(S) : \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + \ x_3 = -3 \end{cases}.$$

On écrit (S) *sous la forme matricielle comme suit :*

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

4.3. Résolution du système d'équations linéaires

Dans cette section, nous discutons de deux méthodes de solution pour le système (S) où dans les deux, nous utilisons la forme matricielle de ce système.

4.3.1. Résolution par la méthode de la matrice inverse

On considère le système (S) sous la forme $A \times X = B$ avec A est inversible. Alors, l'unique solution du (S) est donnée par $X = A^{-1} \times B$.

Exemple 4.2. *Soit le système*

$$(S): \quad \begin{cases} y + z = 2 \\ x + z = 1 \\ x + y = -3 \end{cases} .$$

1- On note par A la matrice de coefficients du système (S). Sachant que $\frac{1}{2} \cdot (A^2 - A) = I_3$, montrer que A est inversible, puis déterminer A^{-1}.
2- Résoudre (S) par la méthode de l'inverse du matrice.
En effet,
- *On écrit d'abord (S) sous forme matricielle comme suit :*

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

Donc, la matrice de coefficients $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On a : $\det(A) = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$. *Le déterminant de A est non nul $(2 \neq 0)$, donc A est inversible.*
- *La relation $\frac{1}{2} \cdot (A^2 - A) = I_3$ peut s'écrite sous forme : $A \times [\frac{1}{2} \cdot (A - I_3)] = I_3$, alors on en déduit que* $A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot (A - I_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
- *En appliquant la méthode de la matrice inverse, on obtient l'unique solution du système est donnée par :*

$$\begin{aligned} X &= A^{-1} \times B \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

4.3.2. Résolution par la méthode de Cramer

Soit le système

$$(S) : \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} .$$

L'écriture matricielle de (S) est : $A \times X = B$. On définit une matrice notée A_j, la matrice déduite de A en remplaçant la $j^{ème}$ colonne de A par le second membre B, i.e.,

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & b_1 & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

Théorème 4.1. *Si le déterminant de A est non nul, alors l'unique solution du système (S) est donnée par les formules :*

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, \ \textit{pour tout } j \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Exemple 4.3. *On va confirmer la solution du système que nous avons vu dans l'Exemple 4.2, par la méthode de Cramer.*
Soit le système

$$(S) : \quad \begin{cases} y + z = 2 \\ x + z = 1 \\ x + y = -3 \end{cases} .$$

où

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

On a $\det(A) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$. *Alors, d'après le Théorème 4.1 l'unique solution du système (S) est donnée par les formules :*

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, \ \textit{pour tout } j \in \{1, 2, 3\}.$$

On a :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

avec $\det(A_1) = -4$*,* $\det(A_2) = -2$*,* $\det(A_3) = 6$*, et par conséquent*

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-4}{2} = -2,$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-2}{2} = -1,$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{6}{2} = 3.$$

Ainsi la solution du système (S) *est*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

4.4. Exercices

Exercice 4.1. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *de différentes manières les systèmes linéaires suivants, d'inconnues* x *et* y *:*

$$(S_1) : \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 1 \end{cases}, (S_2) : \begin{cases} 2x + iy = 1 \\ ix - 3y = 2 \end{cases}, (S_3) : \begin{cases} (1-i)x - y = i \\ x + (1+i)y = 1 \end{cases}.$$

Exercice 4.2. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les systèmes d'équations linéaires, d'inconnues* x*,*y *et* z *:*

$$(S_1) : \begin{cases} x - 2y = 1 \\ -y + z = 2 \\ x + 2z = 1 \end{cases}, (S_2) : \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}.$$

Exercice 4.3. *On considère le système*

$$(S): \quad \begin{cases} 2x+3y+mz=3 \\ x+y-z=1 \\ x+my+3z=2 \end{cases},$$

d'inconnues les nombres réels x,y *et* z *et de paramètre le réel* m.

1- Écrire (S) *sous forme matricielle.*

2- Déterminer les valeurs de paramètre m *pour que* (S) *admette une solution unique.*

3- Déterminer cet solution par la méthode de l'inverse du matrice, puis par la méthode de Cramer.

Bibliographie

[1] A. Anber, Polycopié de cours du module : Algèbre 2, Département de Mathématiques, Université d'oran, Algérie.

[2] M. M. Bertrand, F. Bertrand, D. Fredon, Mathématiques Licence 1 ; exercices et méthodes, Dunod, France, (2016).

[3] S. Boyd, L. Vandenberghe, Introduction to Applied Linear Algebra, Cambridge University Press, USA, (2018).

[4] C. Carlier, Algèbre 2 notes de cours, UFR Mathémathéque de la décision, Université de Paris IX Dauphine, France.

[5] J. P. Escofier, Toute lalgèbre de la Licence ; Cours et exercices corrigés, Dunod, France, (2016).

[6] J. Hefferon, Linear Algebra, Contact information is on the books home page http ://joshua.smcvt.edu/linear algebra.

[7] K. Hoffman, R. Kunze, Linear Algebra, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA, (1971).

[8] M. Hindry, Cours de mathématiques première année (L1), Université de Denis Diderot Paris 7, France, (2012).

[9] G. Skandalis, Algèbre générale et algèbre linéaire, Université de Paris Diderot Paris 7, Paris, (2017).

[10] B. Vallette, L'algèbre linéaire pour tous, Université de Nice Sophia-Antipolis, France, (2015).