الجمهوريـــة الجزائريـــة الديمقراطيـــة الشعبيـــة

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليـــم العالي والبحث العلمـــي

Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire - Barika

Institut des Sciences

Département de Mathématique

المــركــز الجامعــي – بريكــة

مـــعـــهـــد الـــعـــلـــوم

قسم الرياضيات

Polycopié Pédagogique

Transformations intégrales dans les espaces Lp

Présenté par

Dr : SACI ATEF

Cours / Travaux –Dirigés / Examens précédents

Destiné aux étudiants de :

troisième année Licence mathématiques, semestre 6

Année Universitaire : 2023/2024

Dédicace

De tout mon coeur je dédie ce modeste travail A :

tous les étudiants de mathématiques de troisième année

tous les étudiants qui étudient ces cours

ATEF

Table des matières

Introduction

Vous trouverez dans ce document le module (Transformation intégrale dans les espaces Lp), pour les étudiants de mathématiques de troisième année, représentées dans les chapitres suivants

Le chapitre 1 sur les espaces Lp, Ces espaces constituent un outil fondamental de l'analyse fonctionnelle en permettant la résolution d'équations par approximation avec des solutions non nécessairement dérivables ni même continues.

Le chapitre 2 sur les transformations de Fourier, la transformation de Fourier intervient dans la résolution d'équations et des systèmes différentielles. Aujourd'hui en électronique, cette transformation peut intervenir dans la théorie de la chaleur et au traitement du signal.

Le chapitre 3 sur les transformations de Laplace, nous allons de nouveau examiner les équations différentielles mais en se servant d'un outil très puissant, la transformée de Laplace d'une fonction, ainsi nommée en l'honneur du marquis Pierre-Simon de Laplace.

Le chapitre 4 sur les travaux dirigés, nous présentons des exercices appliqués aux chapitres précédents.

Chapitre 1

Les espaces L^p

Dans ce chapitre, nous définissons un type d'espace de Lebesque qui joue un rôle important dans l'analyse fonctionnelle, la transformée de Fourier et la théorie des équations aux dérivées partielles et des probabilités.

1.1 Les espaces de Lebesque $\mathcal{L}^p$ et L^p

1.1.1 Les espaces $\mathcal{L}^p$

Dans cette section, nous étudierons des familles entières de fonctions, c'est-à-dire des "espaces de fonctions", ou espaces fonctionnels. On considère un espace mesuré (X, M, μ), tel que X un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et on notera $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.1 *Soit $p \in [1, +\infty[$. On définit :*
$\mathcal{L}^p(X, M, \mu) = \left\{ f : X \to K \text{ mesurable } / \int |f|^p \, d\mu < \infty \right\}$.
pour $f \in \mathcal{L}^p(X, M, \mu)$, on note par

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{P}}.$$

Remarque 1.1.1 *Si $(X, M, \mu) = (\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), m)$, m désigne la mesure de comptage alors*

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), m) = l^p(\mathbb{N}) = \left\{ (a_n)_{n\geq 0} : \sum_{n\geq 0} |a_n|^p < +\infty \right\}.$$

Exemple 1.1.1 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.*
vérifier que $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$.
$f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda) \Leftrightarrow f$ *est mesurable et* $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx < \infty$.
– *On a f est continue, d'ou f est mesurable.*
– *On a*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx &= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \arctan g(x)|_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \pi < +\infty. \end{aligned}$$

donc : $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$.

Définition 1.1.2 *Soit* $P = +\infty$. *On définit :*

$\mathcal{L}^\infty(X, M, \mu) = \{f : X \to K, \text{ mesurable telle que } f \text{ est essentiellement bornée}\}$

telle que, une fonction $f : X \to K$ *est essentiellement bornée s'il existe un réel* $A \geq 0$ *tel que* $|f| \leq A$ μ*-presque partout, i.e.* $\mu(\{x \in X, |f(x)| > A\}) = 0$.

pour $f \in \mathcal{L}^\infty(X, M, \mu)$, *on note par*

$$\|f\|_\infty = \underset{x\in X}{supess}\, |f(x)| = inf(\{A \geq 0, \ |f| \leq A \ \mu\text{-presque partout}\}).$$

et on a

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty, \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x \in X$$

Remarque 1.1.2 *Si* $(X, M, \mu) = (\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), m)$, m *désigne la mesure de comptage alors*

$$\mathcal{L}^\infty(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), m) = l^\infty(\mathbb{N}) = \{suites \ bornees\}.$$

Exemple 1.1.2 *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

vérifier que $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$.

$f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda) \Leftrightarrow f$ *est mesurable et essentiellement bornée.*

- *On a* f *est continue, d'ou* f *est mesurable.*
- *On a* $\exists\ A = 1$, $|f(x)| \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ *i.e* $|f(x)| \leq 1$ *p.p, alors* f *est essentiellement bornée.*

  donc $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$.

Proposition 1.1.1 *Soit* $p \in [1, +\infty]$. *L'ensemble* $\mathcal{L}^p(X, M, \mu)$ *est un sous-espace vectoriel de* $F(X, K)$, *c-à-d* $\mathcal{L}^p(X, M, \mu)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

Preuve.

Cas 1. pour $p = 1$ évident

Cas 2. pour $1 < p < +\infty$.

- On a la fonction $f(x) = 0 \in \mathcal{L}^p(X, M, \mu)$, donc $\mathcal{L}^p(X, M, \mu) \neq \varnothing$.

- Soient f, $g \in \mathcal{L}^p(X, M, \mu)$, alors $f + g \in \mathcal{L}^p(X, M, \mu)$?

on a f, $g \in \mathcal{L}^p(X, M, \mu)$ donc f, g sont mesurables, alors la fonction $f+ g$ est mesurable. on a

$$\begin{aligned}
\int_X |f+g|^p \, d\mu &\leq \int_X (|f| + |g|)^P \, d\mu \\
&\leq \int_X 2^P \left(|f|^P + |g|^P\right) d\mu \\
&\leq 2^P \left(\int_X |f|^P \, d\mu + \int_X |g|^P \, d\mu\right) \\
&< \infty \text{ car } f, g \in \mathcal{L}^p(X, M, \mu)
\end{aligned}$$

donc $f+ g$ est mesurable et $\int_X |f+g|^p \, d\mu < \infty$ c-à-d $f + g \in \mathcal{L}^p(X, M, \mu)$

- Soit $f \in \mathcal{L}^p(X, M, \mu)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\alpha f \in \mathcal{L}^p(X, M, \mu)$?

on a $f \in \mathcal{L}^p(X, M, \mu)$ c-à-d f est mesurable, donc αf est mesurable. on a

$$\begin{aligned}
\int_X |\alpha f|^p \, d\mu &\leq \int_X |\alpha|^p (|f|)^P \, d\mu \\
&\leq |\alpha|^P \left(\int_X |f|^P \, d\mu\right) \\
&< \infty \text{ car } f \in \mathcal{L}^p(X, M, \mu)
\end{aligned}$$

donc αf est mesurable et $\int_X |\alpha f|^p \, d\mu < \infty$ c-à-d $\alpha f \in \mathcal{L}^p(X, M, \mu)$.

Cas 3. pour $p = +\infty$.

- On a la fonction $f(x) = 0 \in \mathcal{L}^\infty(X, M, \mu)$, donc $\mathcal{L}^\infty(X, M, \mu) \neq \varnothing$.

- Soient f, $g \in \mathcal{L}^\infty(X, M, \mu)$, alors $f + g \in \mathcal{L}^\infty(X, M, \mu)$?

car f, $g \in \mathcal{L}^\infty(X, M, \mu)$ donc f, g sont mesurables, alors la fonction $f+ g$ est mesurable.

on a

$$f \in \mathcal{L}^\infty(X, M, \mu) \Rightarrow \exists M_1 \succ 0 \ : |f(x)| \leq M_1. \ \mu\text{-presque partout}$$

$$g \in \mathcal{L}^\infty(X, M, \mu) \Rightarrow \exists M_2 \succ 0 \ : |g(x)| \leq M_1. \ \mu\text{-presque partout}$$

alors

$$\begin{aligned} |f+g| &\leq |f|+|g| \\ &\leq M_1+M_1 \ \mu\text{-presque partout} \end{aligned}$$

donc $f+\ g$ est mesurable et $|f+g| \leq M$ μ-presque partout tel que $(M = M_1 + M_1)$ c-à-d $f+g \in \mathcal{L}^{\infty}(X, M, \mu)$.

- De la même façon, on montre que $\alpha f \in \mathcal{L}^{\infty}(X, M, \mu)$.Cela montre que $\mathcal{L}^{p}(X, M, \mu)$ est un sous-espace vectoriel de $F(X, K)$, $p \in [1, +\infty]$.

Définition 1.1.3 *Une fonction $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe ssi pour tout $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$ alors*

$$\varphi\left(tx+(1-t)\,y\right) \leq t\varphi\left(x\right)+(1-t)\,\varphi\left(y\right).$$

Définition 1.1.4 *On dit que p et q sont deux exposants conjugués pour tout p, $q \in [1, +\infty]$ ssi $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. On notera dans toute la suite q le conjugu e de p.*

Par exemple, 1 et $+\infty$ sont conjugués, 2 est son propre conjugué, 3 a pour conjugué $\frac{3}{2}$.

Lemme 1.1.1 ***(Inégalité de Young)*** *Soient p, $q \in]1, +\infty[$ deux exposants conjugués. Si $a, b \geq 0$, on a*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$$

avec égalité si et seulement si $a^p = b^q$.

Preuve.

Cas 1 : pour $a=0$ ou $b=0$ c'est évident.

Cas 2 : pour $a, b > 0$, posons $(u, v) = (a, b)$, on a

$$\begin{aligned}
u.v &= e^{\ln(u)}.e^{\ln(v)} \\
&= e^{\frac{1}{p}\ln(u^p)}.e^{\frac{1}{q}\ln(v^q)} \\
&= e^{\frac{1}{p}\ln(u^p)+\frac{1}{q}\ln(v^q)} \\
&\leq \frac{1}{p}e^{\ln(u^p)} + \frac{1}{q}e^{\ln(v^q)} \text{ car la fonctiont } exp(t) \text{ est strictement convexe} \\
&\leq \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q
\end{aligned}$$

donc

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

Lemme 1.1.2 ***(Inégalité de Hölder)*** *Soient $p, q \in [1, +\infty]$ des exposants conjugués. Si $f, g : X \to K$ sont des applications mesurables et si $f \in \mathcal{L}^p(X, M, \mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(X, M, \mu)$ alors $f.g \in \mathcal{L}^1(X, M, \mu)$ et on a*

$$\int_X |f.g| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q \tag{1.1.1}$$

Pour $p = q = 2$, il s'agit de l'inégalité de ***Cauchy-Schwarz***

$$\int_X |f.g| \, d\mu \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

Preuve.

Cas 1 : pour $(p = 1,\ q = +\infty)$ ou $(q = 1,\ p = +\infty)$ c'est facile.

Cas 2 : pour $1 < p, q < +\infty$.

- si $\int_X |f.g| \, d\mu = 0$ c'est évident.

- si $\int_X |f.g|\,d\mu \neq 0$, on applique l'inégalité de Young pour $a = \frac{|f|}{\|f\|_p}, b = \frac{|g|}{\|g\|_q}$, et car $f \in \mathcal{L}^p(X, M, \mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(X, M, \mu)$ on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_X \left[\frac{|f|}{\left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}}\right] \cdot \left[\frac{|g|}{\left(\int_X |g|^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}}\right] d\mu \\
&\leq \int_X \left[\frac{|f|^p}{p\left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)} d\mu\right] + \int_X \left[\frac{|g|^q}{q\left(\int_X |g|^q\,d\mu\right)} d\mu\right] \\
&\leq \frac{1}{p\left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)} \int_X |f|^p\,d\mu + \frac{1}{q\left(\int_X |g|^q\,d\mu\right)} \int_X |g|^q\,d\mu \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1
\end{aligned}$$

donc

$$\int_X |f.g|\,d\mu \leq \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} . \left(\int_X |g|^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \|g\|_q .$$

Lemme 1.1.3 ***(Inégalité de Minkowski)*** *Soit $p \in [1, +\infty[$. Si $f, g : X \to K$ sont des applications mesurables et si $f, g \in \mathcal{L}^p(X, M, \mu)$ alors*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \tag{1.1.2}$$

En particulier, si $f, g \in \mathcal{L}^p(X, M, \mu)$, alors $f + g \in \mathcal{L}^p(X, M, \mu)$ et l'inégalité (1.1.2) est vraie.

Preuve.

Cas 1. pour $p = 1$ évident.

Cas 2. pour $p = +\infty$. On a

$$|f+g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \tag{1.1.3}$$

et on a

$$\|f+g\|_\infty = inf\ (\{A \geq 0,\ |f+g| \leq A\ \mu\text{-presque partout}\}) \tag{1.1.4}$$

de (1.1.3) et (1.1.4) , en passant à la borne inférieure on trouve

$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .$$

Cas 3. pour $1 < p < +\infty$.

Si $\|f+g\|_p = 0$ alors l'inégalité est triviale.

Si $\|f+g\|_p \neq 0$, on a

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{\frac{p}{p-1}} = 1 \text{ et } \frac{p}{p-1} > 1$$

on pose

$$q = \frac{p}{p-1}$$

c-à-d

$$(p-1)\, q = p \tag{1.1.5}$$

alors l'inégalité de Hölder pour $q = p/(p-1)$ donne

$$\begin{aligned}
\int_X |f+g|^p \, d\mu &= \int_X |f+g|^{p-1} |f+g| \, d\mu \\
&\leq \int_X |f+g|^{p-1} |f| \, d\mu + \int_X |f+g|^{p-1} |g| \, d\mu \\
&\overset{\text{par Hölder}}{\leq} \left[\int_X |f+g|^{(p-1)q} \, d\mu\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_X |f|^p \, d\mu\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_X |f+g|^{(p-1)q} \, d\mu\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_X |g|^p \, d\mu\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\overset{\text{par (1.1.5)}}{\leq} \left[\int_X |f+g|^p \, d\mu\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_X |f|^p \, d\mu\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_X |f+g|^p \, d\mu\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_X |g|^p \, d\mu\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left[\int_X |f+g|^p \, d\mu\right]^{\frac{1}{q}} \left(\left[\int_X |f|^p \, d\mu\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_X |g|^p \, d\mu\right]^{\frac{1}{p}}\right)
\end{aligned} \tag{1.1.6}$$

donc de (1.1.6) , on obtient

$$\left(\int_X |f+g|^p \, d\mu\right) . \left[\int_X |f+g|^p \, d\mu\right]^{-\frac{1}{q}} \leq \left(\left[\int_X |f|^p \, d\mu\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_X |g|^p \, d\mu\right]^{\frac{1}{p}}\right) \tag{1.1.7}$$

car $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$, de (1.1.7) on a

$$\left(\int_X |f+g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\left[\int_X |f|^p \, d\mu\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_X |g|^p \, d\mu\right]^{\frac{1}{p}}\right)$$

c-à-d

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \,.$$

1.1.2 Les espaces L^p

Soit $p \in [1,+\infty]$. Il suit de l'inégalité de Minkowski que $\mathcal{L}^p(X,M,\mu)$ est un espace vectoriel, et que l'application $\|.\|_p : f \to \|f\|_p$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(X,M,\mu)$. En effet,

– $\|f\|_p \geq 0$ pour toute application $f \in \mathcal{L}^p(X,M,\mu)$.

– $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \, \|f\|_p$ pour toute application $f \in \mathcal{L}^p(X,M,\mu)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

– $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ pour toute application $f,g \in \mathcal{L}^p(X,M,\mu)$.

En revanche $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ pour μ-presque tout $x \in X$, donc $\|f\|_p$ n'est pas une norme si la tribu M contient des ensembles non vides de mesure nulle.

Considérons alors R la relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^p(X,M,\mu)$ définie par

$$fRg \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x \in X \text{ i.e } \|f-g\|_p = 0.$$

Etant donnée une application $f \in \mathcal{L}^p(X,M,\mu)$, on note $[f]$ la classe d'équivalence de f pour la relation R, c'est à dire que

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}^p(X,M,\mu) : f(x) = g(x) \ \mu\text{-presque partout}\}$$

Définition 1.1.5 *Soit $p \in [1,+\infty]$. On note $L^p(X,M,\mu)$ le quotient de $\mathcal{L}^p(X,M,\mu)$ par la relation d'équivalence R, c-à-d*

$$L^p(X,M,\mu) = \{[f] \, : f \in \mathcal{L}^p(X,M,\mu)\} = \mathcal{L}^p(X,M,\mu)\,/R\,.$$

Remarque 1.1.3 *En fait, lorsque l'on travaille avec des éléments de $L^p(X, M, \mu)$, on raisonne avec des classes d'équivalence. Mais dans toute la suite du cours, on identifiera la classe d'équivalence avec l'une de ses fonctions représentatives. Cependant, on ne pourra pas évaluer une fonction de $L^p(X, M, \mu)$ en un point. En effet, deux fonctions dans la même classe d'équivalence peuvent différer sur un ensemble de points de mesure nulle.*

Propriétés élémentaires des espaces L^p.

Proposition 1.1.2 *Soit $p \in [1, +\infty]$. Alors le couple $(L^p(X, M, \mu), \|\|_p)$ est un espace vectoriel normé, avec les opérations d'espace vectoriel*

$$[f] + [g] = [f + g],\ \ \alpha[f] = [\alpha f],\ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f, g \in \mathcal{L}^p(X, M, \mu).$$

et la norme

$$\|[f]\|_p = \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{P}},\ \ pour\ 1 \leq p < +\infty, \forall f \in \mathcal{L}^p(X, M, \mu),$$

$$\|[f]\|_\infty = \|f\|_\infty = inf(\{A \geq 0,\ \ |f| \leq A\ \mu\text{-presque partout}\}),\ \ pour\ p = +\infty, \forall f \in \mathcal{L}^\infty(X, M, \mu).$$

Preuve.

- La preuve que l'ensemble $L^p(X, M, \mu)$ est un espace vectoriel est la même que la preuve du proposition 1.1.1

- Il suffit de montrer que l'application $\|.\|_p$ est une norme sur $L^p(X, M, \mu)$. On suppose que $p < 1$. Si $\|f\|_p = 0$, alors $f = 0$ μ-presque partout, donc $f = 0$ dans $L^p(X)$. L'inégalité de Minkowski donne l'inégalité triangulaire et on a bien l'homogénéité. On montre également le cas $p = 1$.

On n'étudie d'ordinaire les espaces vectoriels normés que s'ils sont complets

Théorème 1.1.1 ***(Riesz-Fisher)**.$\forall p \in [1, +\infty]$, alors l'espace L^p muni de la norme $\|.\|_p$ est un espace de Banach i.e (un espace vectoriel normé complet).*

Afin de prouver cette théorème, nous avons besoin des théorèmes suivantes

Théorème 1.1.2 ***(Convergence monotone, Beppo Levi)*** *Soit $f_n : X \to [0, +\infty]$ une suite croissante de fonctions mesurables positives, et soit $f = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n$. Alors, f est mesurable et*

$$\lim_{n \to +\infty} \int f_n d\mu = \int \left(\lim_{n \to +\infty} f_n \right) d\mu = \int f d\mu$$

Théorème 1.1.3 ***(Convergence dominée de Lebesgue)*** *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions L^1 telle que*

i) $f_n(x) \to f(x)$ p.p sur X,

ii) il existe une fonction $g \in L^1$ telle que $\forall\ n\ |f_n(x)| \leq g(x)$ p.p sur X.

Alors $f \in L^1$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow 0$.

Preuve théorème 1.1.1.

Cas 1 pour $p = +\infty$. Soit $(f_n)_{n \in N}$ une suite de Cauchy dans $L^\infty(X, M, \mu)$.

soit $k \geq 1$:

$$\exists N_k \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N_k, \|f_n - f_m\|_\infty < \frac{1}{k}.$$

Par la définition de la norme $\|.\|_\infty$, on a

$$\exists N_k \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N_k, |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k}\ \mu\text{-presquepartout}$$

c-à-d $\exists\ E_k$ négligeable tel que

$$\exists N_k \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N_k, |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k}, \forall x \in X / E_k$$

Posons $E = \cup_k E_k$ (E négligeable), donc on a

$$\exists N_k \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N_k, |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k}, \forall x \in X / E\ .$$

Ainsi $(f_n(x))_{n\in N}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ et car $(\mathbb{R}, |.|)$ est un espace de Banach, donc $(f_n(x))_{n\in N}$ convergente vers un certain $f(x) \in \mathbb{R}$. c-à-d pour $m \to +\infty$

$$\exists N_k \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_k, \|f_n - f\|_\infty < \frac{1}{k}. \tag{1.1.8}$$

de plus

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty &\leq \|f - f_n + f_n\|_\infty \\ &\leq \|f - f_n\|_\infty + \|f_n\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{k} + \|f_n\|_\infty\end{aligned}$$

alors $f \in L^\infty$, alore de (1.1.8) on a

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0 \text{ pour } n \to +\infty$$

donc

$$f_n \to f \in L^\infty \text{ dans } L^\infty$$

ainsi L^∞ est un espace de Banach.

Cas 2 pour $1 \leq p < +\infty$. Soit $(f_n)_{n\in N}$ une suite de Cauchy dans $L^p(X, M, \mu)$. pour conclure il suffit de montrer qu'une sous suite extraite converge dans L^p.

On extrait une sous suite (f_{n_k}) telle que

$$\begin{aligned}&\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_1, \|f_n - f_m\|_p < \frac{1}{2}, \\ &n_2 \geq n_1, \forall n, m \geq n_2, \|f_n - f_m\|_p < \left(\frac{1}{2}\right)^2, \\ &. \\ &. \\ &n_k \geq n_{k-1}, \forall n, m \geq n_k, \|f_n - f_m\|_p < \left(\frac{1}{2}\right)^k.\end{aligned}$$

c-à-d

$$\forall k \geq 1, \left\| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \right\|_p < \frac{1}{2^k}$$

On va montrer que (f_{n_k}) converge dans L^p. Pour simplifier les notations on écrit f_k au lieu de f_{n_k}, de sorte que l'on a

$$\forall k \geq 1, \left\| f_{k+1} - f_k \right\|_p < \frac{1}{2^k}$$

on pose

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \left| f_{k+1}(x) - f_k(x) \right|$$

on a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et on a aussi

$$\begin{aligned}
\|g_n\|_p &= \left\| \sum_{k=1}^{n} \left| f_{k+1} - f_k \right| \right\|_p \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \left\| f_{k+1} - f_k \right\|_p \ \text{(l'inégalité de Minkowski)} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \ \text{(série géométrique)} \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

donc $g_n \in L^p$. Par le théorème 1.1.2 de la convergence monotone on a $g_n \to g$ dans L^p et $g \in L^p$.

D'autre part, pour $m \geq n \geq 2$, et par la définition de g_n, on a

$$\begin{aligned}
|f_m(x) - f_n(x)| &= |f_m(x) - f_{m-1}(x) + f_{m-1}(x) + ... + f_{n-1}(x) - f_{n-1}(x) - f_n(x)| \\
&\leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + ... + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \\
&\leq \sum_{k=1}^{m-1} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| - \sum_{k=1}^{n-1} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \\
&\leq g(x) - g_{n-1}(x) \qquad (1.1.9)
\end{aligned}$$

il en résulte que p.p sur X, $(f_n(x))$ est de Cauchy et pour $m \to +\infty$, de (1.1.9) on a

$$|f(x) - f_n(x)| \leq g(x)$$

c-à-d

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_n(x)| &\leq g(x), \text{ pour } n \geq 2 \\
&\Rightarrow |f(x) - f_n(x)|^p \leq (g(x))^p, \text{ pour } n \geq 2 \\
&\Rightarrow \|f - f_n\|_p \leq \|g\|_p < +\infty, \text{ pour } n \geq 2
\end{aligned}$$

donc $f - f_n \in L^p$, et

$$\begin{aligned}
\|f\|_p &= \|f - f_n + f_n\|_p \\
&\leq \|f - f_n\|_p + \|f_n\|_p \\
&\leq \|g\|_p + \|f_n\|_p
\end{aligned}$$

alors $f \in L^p$, de plus on a

$$\|f - f_n\|_p \leq \|g - g_{n-1}\|_p$$

Pour $n \to +\infty$

$$\|f - f_n\|_p \to 0$$

ainsi L^p est un espace de Banach.

Lien entre convergences μ-presque partout et L^p

Proposition 1.1.3 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^p(X)$ convergeant dans $L^p(X)$ vers f. Alors il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant μ-presque partout vers f.*

Preuve. voir ([7], chapitre 8).

Théorème 1.1.4 ***(Convergence dominée L^p).*** *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^p(X)$ et f :*

$X \longrightarrow \mathbb{R}$ *mesurable telles que*

(i) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* μ*-presque partout vers* f*,*

(ii) Il existe $g \in L^p(X)$ *telle que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on ait* μ*-presque partout* $|f_n| \leq g$*. Alors* $\|f_n - f\| \longrightarrow 0$

Preuve. Voir ([7], chapitre 8). Ici, il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée (théorème 1.1.3).

Comparaison des espaces L^p

En général, il n'y a pas de relations d'inclusion entre les espaces $L^p(X, M, \mu)$ pour différents exposants p. Par exemple, considérons $(X, M, \mu) = (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$ et les espaces $L^1(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$, $L^2(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$ associés. Alors avec

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} 1_{]0,1]}(x), \quad g(x) = \frac{1}{x} 1_{[1,+\infty[}(x),$$

on a $f \in L^1(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$ mais $f \notin L^2(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$, alors que $g \in L^2(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$ mais $g \notin L^1(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$.

On n'a donc aucune inclusion entre les espaces $L^1(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$ et $L^2(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$. L'exemple se généralise pour les espaces $L^p(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$ et $L^q(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$. Par contre si μ est une mesure finie (typiquement une mesure de probabilité), les espaces $L^p(X, M, \mu)$ sont ordonnés pour l'inclusion.

Théorème 1.1.5 *Soit* (X, M, μ) *un espace mesuré fini (c'est à dire* $\mu(X) < +\infty$*) alors pour* $p \geq q$*, on a*

$$L^p(X, M, \mu) \subset L^q(X, M, \mu)$$

Preuve.

Cas 1 : si $p = +\infty$: si $f \in L^\infty(X, M, \mu)$ alors $f \in L^q(X, M, \mu)$, en effet

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \text{ pour } \mu\text{-presque chaque } x$$

et donc

$$\begin{aligned}\|f\|_q &= \left(\int_X |f|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\int_X \|f\|_\infty^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\|f\|_\infty^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_X d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|f\|_\infty \left(\mu\left(X\right)\right)^{\frac{1}{q}} < +\infty.\end{aligned}$$

alors $f \in L^q(X, M, \mu)$.

Cas 2 : si $f \in L^p(X, M, \mu)$ et $p \geq q$ alors $f \in L^q(X, M, \mu)$, en effet comme $\frac{q}{p} + \frac{p-q}{p} = 1$, posons $\alpha = \frac{p}{q}, \beta = \frac{p}{p-q}$, sont conjugués, l'inégalité d'Hölder (1.1.1) pour ces exposants α, β donne alors

$$\begin{aligned}\|f\|_q^q &= \int_X \left(|f|^q \times 1\right) d\mu \\ &\leq \left[\int_X \left(|f|^q\right)^{\frac{p}{q}} d\mu\right]^{\frac{q}{p}} \left[\int_X (1)^{\frac{p}{p-q}} \, d\mu\right]^{\frac{p-q}{p}} \\ &\leq \left(\mu\left(X\right)\right)^{\frac{p-q}{p}} \left[\int_X \left(|f|^p\right) d\mu\right]^{\frac{q}{p}}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\|f\|_q &\leq \left[\left(\mu\left(X\right)\right)^{1-\frac{q}{p}}\right]^{\frac{1}{q}} \left(\left[\int_X \left(|f|^p\right) d\mu\right]^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left[\left(\mu\left(X\right)\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\right] \left[\int_X \left(|f|^p\right) d\mu\right]^{\frac{1}{p}} < +\infty.\end{aligned}$$

alors $f \in L^q(X, M, \mu)$.

Remarque 1.1.4 *Plus précisément, le théorème 1.1.5 montre une inclusion topologique* $L^p(X, M, \mu) \hookrightarrow L^q(X, M, \mu)$ *car l'inclusion canonique* $f \in L^p(X, M, \mu) \longmapsto f \in L^q(X, M, \mu)$ *est continue.*

Proposition 1.1.4 *1- Si* $1 \leq p < +\infty$*, l'ensemble des fonctions etagées intégrables est dense dans* L^p*.*

2- L'ensemble des fonctions étagées est dense dans L^{∞}.

1.1.3 Dual. Réflexivité. Séparabilité de L^p

Dans cette section nous présentons des résultats très importants concernant la réflexivité, la séparabilité et la dualité des espaces L^p.

Dual de L^p

Dual topologique

Le dual topologique d'un espace vectoriel normé E sur le corps K est, par définition, l'ensemble des formes linéaires continues de E, c-à-d des applications linéaires continues de E dans K. On note cet ensemble E^*. Ainsi, $E^* = L(E, K)$ et, par ce qui précède, E^* muni de la norme $\|.\|$ définie par

$$\|f\| = \sup_{x\in E, \|x\|=1} |f(x)| = \sup_{x\in E, \|x\|\leq 1} |f(x)| = \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \tag{1.1.10}$$

est un espace de Banach puisque K est complet.

Lemme 1.1.4 *Soient p et q tels que $1 \leq p, q \leq +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $g \in L^q$, l'application Lg définie par*

$$\begin{aligned} Lg : L^p(X) &\to K \\ f &\to \int_X f(x)\, g(x)\, dx \end{aligned}$$

est une forme linéaire continue sur L^p de norme égale à $\|g\|_q$.

Preuve. Voir ([4], chapitre 3).

Théorème 1.1.6 ***(Représentation de Riesz)*** *soit $1 \leq p < +\infty$ et $1 < q \leq +\infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour toute forme linéaire continue Φ sur L^p, il existe un unique $g \in L^q$ tel que $\Phi = Lg$ et on a $\|g\|_{L^q} = \|\Phi\|_{(L^p)^*}$.*

Ce théorème est très important. Il exprime que toute forme linéaire continue sur L^p avec $1 \leq p < +\infty$, se représente à l'aide d'une fonction de L^q. L'application $g \to Lg$ est une isométrie linéaire bijective qui permet d'identifier le dual de L^p avec L^q.

Preuve. Voir ([4], chapitre 3).

Conclusion 1.1.1 *Le dual de L^p s'identifie à L^q tels que $1 \leq p < +\infty$ et $1 < q \leq +\infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ $= 1$.*

Théorème 1.1.7 *Le dual de L^∞ contient strictement L^1 et s'identifie a l'espace des mesures de Radon.*

Réflexivité de L^p

Définition 1.1.6 *On dit que E est réflexif si l'isométrie canonique J est surjective E sur E^{**} c-à-d $J(E) = E^{**}$, ou E^{**} le dual topologique de E^*.*

Théorème 1.1.8 *L^p est réflexif pour $1 < p < +\infty$.*

Afin de prouver ce théorème, nous avons besoin des définitions et théorèmes suivantes

Définition 1.1.7 *On dit qu'un espace de Banach E est uniformément convexe si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$(x, y \in E, \ \ \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \ \ et \ \ \|x - y\| > \epsilon) \Rightarrow \left(\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta \right).$$

Théorème 1.1.9 ***(Milman-Pettis)*** *Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.*

Théorème 1.1.10 *. Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si E^* est réflexif. où E^* est le dual topologique de E (l'ensemble des formes linéaires continues de E dans $\mathbb{R}$).*

Preuve du théorème 1.1.8. Pour la démonstration du théorème nous envisageons trois étapes.

Étape 1 (**Première inégalité de Clarkson**).

Soit $2 \leq p < +\infty$, on a

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p}^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{L^p}^p \leq \frac{1}{2}\left(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p\right), \quad \forall f, g \in L^p. \tag{1.1.11}$$

En effet, il suffit de montrer que

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}\left(|a|^p + |b|^p\right), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

On a

$$\alpha^p + \beta^p \leq \frac{1}{2}\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right)^{\frac{p}{2}}, \quad \forall \alpha, \beta \geq 0.$$

se ramener au cas où $\beta = 1$ et noter que la fonction $(x^2+1)^{\frac{p}{2}} - x^p - 1$ est croissante sur $[0, +\infty[$.

En prenant $\alpha = \left|\frac{a+b}{2}\right|$, $\beta = \left|\frac{a-b}{2}\right|$ il vient

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p &\leq \left(\left|\frac{a+b}{2}\right|^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2\right)^{\frac{p}{2}} \\
&= \left(\left|\frac{a^2}{2}\right| + \left|\frac{b^2}{2}\right|\right)^{\frac{p}{2}} \\
&\leq \frac{1}{2}\left(|a|^p + |b|^p\right)
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité résulte de la convexité de la fonction $x \longrightarrow |x|^{\frac{p}{2}}$ car $p \geq 2$.

Étape 2. L^p est uniformément convexe, et donc réflexif pour $2 \leq p < +\infty$.

En effet, soit $\varepsilon > 0$ fixé. On suppose que

$$\|f\|_{L^p} \leq 1, \|g\|_{L^p} \leq 1 \text{ et } \|f-g\|_{L^p} > \varepsilon$$

On déduit de (1.1.11) que

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p}^p < 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \text{ et donc } \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p} < 1 - \delta$$

avec

$$\delta = 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} > 0$$

Par conséquent L^p est uniformément convexe, et donc réflexif.

Étape 3. L^p est réflexif pour $1 < p \leq 2$.

Soit $1 < p \leq 2$. On considère l'opérateur $T : L^p \longrightarrow (L^q)^*$ défini comme suit : Soit $u \in L^p$ fixé, l'application $Tu : f \in L^q \longrightarrow \int uf$ est une forme linéaire et continue sur L^q de sorte que

$$\langle Tu, f\rangle = \int uf, \quad \forall f \in L^q$$

D'après l'inégalité de Hölder

$$|\langle Tu, f\rangle| \leq \|u\|_{L^p} \|f\|_{L^q}$$

et par suite, de (1.1.10) on trouve

$$\|Tu\|_{(L^q)^*} \leq \|u\|_{L^p} \tag{1.1.12}$$

D'autre part, posons

$$f_0(x) = |u(x)|^{p-2} u(x), \quad (f_0(x) = 0 \text{ si } u(x) = 0)$$

on a

$$f_0 \in L^q, \|f_0\|_{L^q} = \|u\|_{L^q}^{p-1} \text{ et } \langle Tu, f_0\rangle = \|u\|_{L^p}^p$$

donc

$$\|Tu\|_{(L^q)^*} \geq \frac{\langle Tu, f_0\rangle}{\|f_0\|} = \|u\|_{L^p} \tag{1.1.13}$$

et en comparant (1.1.12) et (1.1.13) on obtient $\|Tu\|_{(L^q)^*} = \|u\|_{L^p}$ .Il en résulte que T est une isométrie de L^p sur un sous-espace fermé (puisque L^p est complet) de $(L^q)^*$. Or L^q est réflexif car $2 \leq p < +\infty$ ($2^{ème}$ étape) et donc $(L^q)^*$ est réflexif voir théorème 1.1.10. Il s'en suit que $T(L^p)$ est réflexif et donc aussi L^p.

Proposition 1.1.5 *Les espaces* L^1 *et* L^∞ *ne sont pas réflexifs.*

Preuve. Voir ([4], chapitre 4).

Définition 1.1.8 *Une fonction* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *est à support compact s'il existe un compact* $K \subseteq X$ *tel que* f *vaut zéro sur* $X \setminus K$ *: Nous définissons l'ensemble des fonctions continues à support compact sur* X

$$C_c(X) = \{f : X \ \longrightarrow \mathbb{R},\ f \text{ est continue et a support compact}\}$$

Nous appelons le support de f dans X l'ensemble

$$\operatorname{supp}_X(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}} \subseteq X$$

ou l'adhérence est relative à la topologie de X. Alors f est a support compact précisément quand $\operatorname{supp}_X(f)$ est compact.

Théorème 1.1.11 ***(Densité)*** *Soit* X *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, *L'espace* $C_c(X)$ *est dense dans* $L^p(X)$ *pour* $1 \leq p < +\infty$.

Preuve. Voir ([3], chapitre 4).

Séparabilité L^p

Définition 1.1.9 *On dit qu'un espace métrique* E *est séparable s'il existe un sous-ensemble* $D \subset E$ *dénombrable et dense.*

Théorème 1.1.12 L^p *est séparable pour* $1 \leq p < +\infty$.

Preuve. On désigne par $(R_i)_{i \in I}$ la famille dénombrable de pavés R de la forme

$$R = \prod_{k=1}^{n}]a_k, b_k[\ \text{ avec } a_k, b_k \ \in \mathbb{Q} \text{ et } R \in X$$

On désigne par E l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ engendré par les fonctions 1_{R_i} (c-à-d les combinaisons linéaires finies à coefficients rationnels des fonctions 1_{R_i}), de sorte que E est dénombrable. Montrons que E est dense dans $L^p(X)$. Soit $f \in L^p(X)$ et soit $\varepsilon > 0$ fixés. Soit $f_1 \in C_c(X)$ tel que $\|f - f_1\|_{L^p} < \varepsilon$ (théorème 1.1.11). Soit X' un ouvert borné tel que $suppf_1 \subset X' \subset X$ comme $f_1 \in C_c(X')$, on construit aisément une fonction $f_2 \in E$ telle que $suppf_2 \subset X'$ et que $|f_2(x) - f_1(x)| \leq \frac{\varepsilon}{|X'|^{\frac{1}{p}}}$ p.p sur X'. On commence par recouvrir $Suppf_1$ par un nombre fini de pavés R_i sur lesquels l'oscillation de f_1 est inférieure à $\frac{\varepsilon}{|X'|^{\frac{1}{p}}}$. Il en résulte que$\|f_2 - f_1\| < \varepsilon$ et donc $\|f - f_2\| < 2\varepsilon$.

Théorème 1.1.13 *L'espace L^∞ n'est pas séparable.*

Preuve. Voir ([3], chapitre 4).

Le tableau suivant récapitule les principales propriétés des espaces L^p.

	Réflexif	Séparable	Espace dual
$L^p, 1 < p < +\infty$	Oui	Oui	L^q
L^1	Non	Oui	L^∞
L^∞	Non	Non	Contient strictement L^1

1.1.4 Convolution et régularisation sur $\mathbb{R}^n$

Cas mesurable positif

Définition 1.1.10 *Soient $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables. Le produit de convolution de f et g est défini formellement par*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)\, g(y)\, dy \tag{1.1.14}$$

Ce produit est défini pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ si f et g sont positives.

Proposition 1.1.6 *Soient f, g deux fonctions mesurables positives. Alors $f * g$ est mesurable* *positive et*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx$$

Preuve. On note que les fonctions $(x, y) \longmapsto x-y$ et $(x, y) \longmapsto y$ sont continues, donc elles sont mesurables. On en déduit que la fonction $(x, y) \longmapsto f(x-y)g(y)$ est mesurable. Le théorème de Fubini-Tonelli assure alors que la fonction $f * g$ est mesurable.

Proposition 1.1.7 *Soient f, g deux fonctions mesurables positives. Alors*

$$f * g = g * f$$

Preuve. Ce point résulte du changement de variables $z = x - y$ dans l'intégrale.

Exemple 1.1.3 *Soit $f := 1_{[-1/2,1/2]}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned}(f * f)(x) &= \int_{\mathbb{R}} 1_{[-1/2,1/2]}(y) 1_{[-1/2,1/2]}(x-y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} 1_{[-1/2,1/2]}(y) 1_{[x-1/2,x+1/2]}(y)dy \\ &= \lambda\left([-1/2, 1/2] \cap [x-1/2, x+1/2]\right)\end{aligned}$$

Cas général

Remarque 1.1.5 *Soient $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurables. Alors la convolution $f*g$ existe en $x \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si la fonction $y \longmapsto f(x-y)\,g(y)$ est intégrable, c-à-d $|f| * |g| < +\infty$.*

Théorème 1.1.14 *Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $y \longmapsto f(x-y)\,g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$, et $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ de plus on a*

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}$$

Preuve. Voir ([3], chapitre 4).

Proposition 1.1.8 *Soient* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *et* $h \in L^q(\mathbb{R}^n)$. *Alors on a*

$$\int (f * g)\, h = \int g \left(\widehat{f} * h \right). \quad ou\ \widehat{f}(x) = f(-x)$$

Preuve. Voir ([3], chapitre 4).

Proposition 1.1.9 *Soient* $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. *Alors on a*

$$(f * g) \in C(\mathbb{R}^n)$$

Preuve. Voir ([3], chapitre 4).

Chapitre 2

Transformation de Fourier

Dans ce chapitre, nous présentons la transformée de Fourier et ses propriétés ainsi que la méthode de résolution des EDO et EDP avec cette transformée.

2.1 Introduction

Nous savons que les fonctions périodiques peuvent être développées en séries de sinus et de cosinus, ou d'exponentielles complexes, appelées séries de Fourier. Physiquement, dans le cas d'une onde sonore, on peut se représenter les termes d'une série de Fourier comme un ensemble d'harmoniques dont les fréquences forment un ensemble infini mais discret $\{nv\}$, $n = 1, 2, 3...$ ($v = w/2\pi$ est la fréquence du fondamental). En électricité, une tension périodique peut être représentée par une série de Fourier. Celle-ci est une superposition d'un ensemble infini discret de tensions alternatives de fréquences nv. De même, en optique, une lumière constituée d'un ensemble discret de longueurs d'onde $\{\lambda/n\}$,$n = 1, 2...$, c'est-'a-dire un ensemble discret de couleurs, peut être représentée par une série de Fourier.

La plus grande difficulté dans la représentation des fonctions par les séries de Fourier est que nous ne pouvons pas représenter des fonctions non périodiques à l'aide de séries de Fourier. Dans ce cas, la transformée de Fourier est un outil mathématique pour représenter des fonctions non périodiques, tout comme la série de Fourier était un outil pour représenter des fonctions périodiques. Ici, une somme est remplacée par une intégrale, la série de Fourier sera remplacée par une intégrale de Fourier. Celle-ci peut être utilisée pour représenter des fonctions non périodiques, par exemple un son qui n'est pas répété, une impulsion unique de tension, ou un flash de lumière. L'intégrale de Fourier fait intervenir un spectre continu de fréquences, par exemple un ensemble de sons musicaux ou de couleurs de lumière.

2.1.1 Démonstration de la transformation de Fourier

Décomposition en Série de Fourier

Une fonction $f(t)$ de période T, s'exprime sous certaines conditions comme

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nw_0 t) + b_n \sin(nw_0 t) \tag{2.1.1}$$

où

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(nw_0 t)\,dt,\ \ b_n = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(nw_0 t)\,dt \tag{2.1.2}$$

On a les formules de moivre et d'Euler

$$\begin{cases} e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \\ e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{c} \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{array} \tag{2.1.3}$$

En insérant (2.1.3) dans (2.1.1), on obtient

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{e^{inw_0t} + e^{-inw_0t}}{2} + b_n \frac{e^{inw_0t} - e^{-inw_0t}}{2i} \tag{2.1.4}$$

En multipliant la quantité $b_n \frac{e^{inw_0t}-e^{-inw_0t}}{2i}$ par $\frac{i}{i}$ et après simplification, on trouve

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inw_0t} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inw_0t} \tag{2.1.5}$$

Posons

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2},\ \ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \tag{2.1.6}$$

c à d, de (2.1.2) on a

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-inw_0t} dt \tag{2.1.7}$$

de (2.1.5), (2.1.6) et (2.1.7) on trouve

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inw_0t} + c_{-n} e^{-inw_0t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inw_0t} = \int_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inw_0t} dn = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-inw_0t} dt\right] e^{inw_0t} dn \end{aligned}$$

Par changement de variable

$$w = nw_0 \Longrightarrow dw = w_0 dn$$

et car $w_0 = \frac{2\pi}{T}$, alors

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-inw_0 t} dt \right] e^{inw_0 t} dn \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-iwt} dt \right] e^{iwt} \frac{dw}{\frac{2\pi}{T}} \quad \text{et car } T \longrightarrow +\infty \text{ (} f \text{ non périodique)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-iwt} dt \right] e^{iwt} dw \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

par ce que $w = 2\pi\alpha$ c à d $dw = 2\pi d\alpha$, où w est la pulsation mais α est la fréquence, donc

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i2\pi\alpha t} dt \right] e^{i2\pi\alpha t} d\alpha \tag{2.1.9}$$

finalement (2.1.9) nous donne la définition de la transformée de Fourier que nous présentons dans la section suivante

2.2 Transformation de Fourier pour les fonctions intégrables

Définition 2.2.1 *(**Transformation de Fourier**) Soit f absolument intégrable au sens de Lebesgue, c à d, $f \in L^1(\mathbb{R})$. La transformée de Fourier de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ dénotée $F(f(t)) = F(\alpha) = \widehat{f}(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, qu'on définit :*

$$F(f(t)) = F(\alpha) = \widehat{f}(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i2\pi\alpha t} dt \tag{2.2.1}$$

Définition 2.2.2 *(**Transformation de Fourier inverse**) Si la transformée de Fourier de f, notée $\widehat{f}$, est elle même une fonction intégrable, la formule dite de transformation de Fourier inverse, opération notée F^{-1}, et appliquée à $\widehat{f}$, permet de retrouver f a partir des données* *fréquentielles :*

$$f(t) = F^{-1}(F(f(t))) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) e^{i2\pi\alpha t} d\alpha \Leftrightarrow F(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\alpha t} dt \qquad (2.2.2)$$

Cette opération de transformation de Fourier inverse a des propriétés analogues à la transformation directe, puisque seuls changent le coefficient multiplicatif et le $-i$ *devenu* i.

Remarque 2.2.1 *1- Toutes les fonctions appartenant à l'espace de Lebesgue* $L^1(\mathbb{R})$ *admet la transformée de Fourier car dans ce cas l'intégrale* (2.2.1) *existe*

$$\begin{aligned}\left|\widehat{f}(\alpha)\right| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\alpha t} dt\right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t) e^{-i2\pi\alpha t}\right| dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \left|e^{-i2\pi\alpha t}\right| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} < +\infty \end{aligned} \qquad (2.2.3)$$

2- La condition $f \in L^1(\mathbb{R})$ *est une condition suffisante mais non nécessaire, certaines fonctions* $f \notin L^1(\mathbb{R})$ *ont tout de même une transformée de Fourier.*

Exemple 2.2.1 *1- Soit* $f\ (t) = \exp(-|t|)$, *alors*

$$\begin{aligned} F(f(t)) &= F(\alpha) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\alpha t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-i2\pi\alpha t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{-|t|} e^{-i2\pi\alpha t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-i2\pi\alpha t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{t-i2\pi\alpha t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t-i2\pi\alpha t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{(1-i2\pi\alpha)t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{(-1-i2\pi\alpha)t} dt = \left[\frac{1}{(1-i2\pi\alpha)} e^{(1-i2\pi\alpha)t}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{1}{(-1-i2\pi\alpha)} e^{(-1-i2\pi\alpha)t}\right]_{0}^{+\infty} \\ &= \left(\frac{1}{(1-i2\pi\alpha)} - 0\right) + \left(0 - \frac{1}{(-1-i2\pi\alpha)}\right) = \frac{2}{1+(2\pi\alpha)^2} \end{aligned}$$

2- Soit la fonction porte définie par :

$$\pi_\tau(t) = \begin{cases} 1 & si\ \frac{-\tau}{2} \leq t \leq \frac{+\tau}{2} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

alors

$$
\begin{aligned}
F\left(f\left(t\right)\right) = F\left(\alpha\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \pi_\tau(t) e^{-i2\pi\alpha t} dt = \int_{\frac{-\tau}{2}}^{\frac{+\tau}{2}} 1 e^{-i2\pi\alpha t} dt \\
&= \left[\frac{1}{-i2\pi\alpha)} e^{-i2\pi\alpha t}\right]_{\frac{-\tau}{2}}^{\frac{+\tau}{2}} = \left(\frac{e^{-i\pi\alpha\tau} - e^{i\pi\alpha\tau}}{-i2\pi\alpha}\right) = \left(\frac{e^{i\pi\alpha\tau} - e^{-i\pi\alpha\tau}}{i2\pi\alpha}\right) \\
&= \frac{1}{\pi\alpha}\left(\frac{e^{i\pi\alpha\tau} - e^{-i\pi\alpha\tau}}{2i}\right) = \frac{1}{\pi\alpha}\sin\left(\pi\alpha\tau\right) = \tau\frac{\sin\left(\pi\alpha\tau\right)}{\pi\alpha\tau} = \tau\, sinc\left(\pi\alpha\tau\right)
\end{aligned}
$$

3- $g\left(x\right) = \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) H\left(1 - \frac{|x|}{a}\right)$ *où* $H\left(x\right) = 1_{(x>0)}$.

2.3 Propriétés de la transformation de Fourier

2.3.1 Linéarité

Soient f et g deux fonctions, on a

$$\forall\lambda, \mu \in \mathbb{R}\ : F\left[\lambda f\left(t\right) + \mu g\left(t\right)\right] = \lambda F\left[f\left(t\right)\right] + \mu F\left[g\left(t\right)\right] \tag{2.3.1}$$

Preuve.

L'intégration étant une opération linéaire, donc la transformation de Fourier l'est aussi.

2.3.2 La transformée de Fourier des fonctions paire

Si la fonction $f(t)$ est réelle et paire, alors

$$F\left[f\left(t\right)\right] = 2\int_{0}^{+\infty} f\left(t\right)\cos\left(2\pi\alpha t\right) dt \tag{2.3.2}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} F[f(t)] &= F(\alpha) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\cos(2\pi\alpha t) + i\sin(2\pi\alpha t)\right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\cos(2\pi\alpha t)\right] dt + i\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\sin(2\pi\alpha t)\right] dt \end{aligned}$$

car f paire donc $f(t)[\cos(2\pi\alpha t)]$ est une fonction paire et $f(t)[\sin(2\pi\alpha t)]$ est une fonction impaire alors

$$F[f(t)] = F(\alpha) = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\left[\cos(2\pi\alpha t)\right] dt + i(0) = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\left[\cos(2\pi\alpha t)\right] dt$$

2.3.3 La transformée de Fourier des fonctions impaire

Si la fonction $f(t)$ est réelle et impaire, alors

$$F[f(t)] = 2i\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin(2\pi\alpha t)\, dt \tag{2.3.3}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} F[f(t)] &= F(\alpha) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\cos(2\pi\alpha t) + i\sin(2\pi\alpha t)\right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\cos(2\pi\alpha t)\right] dt + i\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\sin(2\pi\alpha t)\right] dt \end{aligned}$$

car f impaire donc $f(t)[\cos(2\pi\alpha t)]$ est une fonction impaire et $f(t)[\sin(2\pi\alpha t)]$ est une fonction paire alors

$$F[f(t)] = F(\alpha) = (0) + i\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\sin(2\pi\alpha t)\right] dt = 2i\int_{0}^{+\infty} f(t)\left[\sin(2\pi\alpha t)\right] dt$$

2.3.4 Translation en temps

La transformée de Fourier de $f(t-a)$ (a réel) est donnée par

$$F[f(t-a)] = e^{-i2\pi\alpha a} F[f(t)] \tag{2.3.4}$$

1. **Preuve.** En posant $u = t - a$ c-à-d $du = dt$, on a

$$\begin{aligned} F[f(t-a)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a)\, e^{-i2\pi\alpha t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-i2\pi\alpha(u+a)} du \\ &= e^{-i2\pi\alpha a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-i2\pi\alpha(u)} du = e^{-i2\pi\alpha a} F[f(t)] \end{aligned}$$

2.3.5 Translation en fréquence

La transformée de Fourier d'un signal $f(t)$ modulé par $e^{2i\pi\alpha_0 t}$ est donnée par

$$F\left[e^{2i\pi\alpha_0 t} f(t)\right] = F(\alpha - \alpha_0) \tag{2.3.5}$$

Preuve. En posant $v = \alpha - \alpha_0$ c-à-d $dv = d\alpha$, on a

$$\begin{aligned} F^{-1}(F(\alpha-\alpha_0)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha-\alpha_0)\, e^{i2\pi\alpha t} d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} F(v)\, e^{i2\pi(v+\alpha_0)t} dv \\ &= e^{2i\pi\alpha_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} F(v)\, e^{i2\pi v t} dv = e^{2i\pi\alpha_0 t} f(t) \end{aligned}$$

c-à-d

$$F(\alpha - \alpha_0) = F\left(e^{2i\pi\alpha_0 t} f(t)\right)$$

2.3.6 Changement d'échelle

La transformée de Fourier de $f(kt)$ ($k \neq 0$) est donnée par

$$F[f(kt)] = \frac{1}{|k|} F\left(\frac{\alpha}{k}\right) \tag{2.3.6}$$

Preuve. En posant $u = kt$ c-à-d $du = kdt$, on a

$$\begin{aligned} F\left[f\left(kt\right)\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(kt\right) e^{-i2\pi\alpha t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(u\right) e^{-i2\pi\alpha\frac{u}{k}} \frac{du}{k} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k} f\left(u\right) e^{-i2\pi\frac{\alpha}{k}u} du = \frac{1}{|k|} F\left(\frac{\alpha}{k}\right) \end{aligned}$$

2.3.7 Conjugaison complexe

La transformée de Fourier du conjugué d'une fonction $f(t)$ est donnée par

$$F\left[\overline{f\left(t\right)}\right] = \overline{F\left(-\alpha\right)} \tag{2.3.7}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} F\left[\overline{f\left(t\right)}\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f\left(t\right)} e^{-i2\pi\alpha t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f\left(t\right) e^{i2\pi\alpha t}} dt \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t\right) e^{i2\pi\alpha t} dt} = \overline{F\left(-\alpha\right)} \end{aligned}$$

2.3.8 Transformée de Fourier d'une dérivée

Supposons $f \in L^1\left(\mathbb{R}\right)$, $f' \in L^1\left(\mathbb{R}\right)$. Alors $f'(t)$ possède une transformée de Fourier, donnée par

$$F\left[f'\left(t\right)\right] = i2\pi\alpha F\left(\alpha\right) \tag{2.3.8}$$

Preuve. On a

$$F\left[f'\left(t\right)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f'\left(t\right) e^{-i2\pi\alpha t} dt \tag{2.3.9}$$

Intégrons par parties l'intégrale au second membre de l'équation (2.3.9)

$$F\left[f'\left(t\right)\right] = \left[f\left(t\right) e^{-i2\pi\alpha t}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-i2\pi\alpha\right) f\left(t\right) e^{-i2\pi\alpha t} dt$$

La fonction $f(t)$ étant intégrable sur $\mathbb{R}$, cela implique que sa limite est nulle pour $t \longrightarrow -\infty$ et

$t \longrightarrow +\infty$, donc

$$\begin{aligned} F\left[f'(t)\right] &= (i2\pi\alpha)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i2\pi\alpha t}dt \\ &= (i2\pi\alpha)\, F(\alpha) \end{aligned}$$

Généralisation : Ce résultat se généralise pour les dérivées successives de $f(t)$ à condition qu'elle vérifient les conditions d'existence de la transformée de Fourier. En effet, pour la dérivée d'ordre n, on démontre facilement par récurrence que

$$F\left[f^{(n)}(t)\right] = (i2\pi\alpha)^n\, F(\alpha) \tag{2.3.10}$$

Cette propriété est fondamentale car elle permet de résoudre simplement certaines équations différentielles.

2.3.9 Dérivation de la transformée de Fourier

La dérivation de $F(\alpha)$ par rapport à la variable α est donnée par

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = -i2\pi F\left[tf(t)\right] \tag{2.3.11}$$

Preuve. Soit $\varphi(t,\alpha) = f(t)\, e^{-i2\pi\alpha t}$. φ possède les propriétés suivantes

a) φ est continue comme produit de deux fonctions continues.

b) $\frac{\partial\varphi(t,\alpha)}{\partial\alpha} = -i2\pi t f(t)\, e^{-i2\pi\alpha t} = -i2\pi t\varphi(t,\alpha)$ est continue.

c) L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t,\alpha)\, dt$ est convergente car $|\varphi(t,\alpha)| = |f(t)|$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$.

d) L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\varphi(t,\alpha)}{\partial\alpha}dt$ est convergente car $\left|\frac{\partial\varphi(t,\alpha)}{\partial\alpha}\right| = |tf(t)|$ et $tf \in L^1(\mathbb{R})$.

Pour ces raisons $F\left[f(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i2\pi\alpha t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t,\alpha)\, dt$ est dérivable dans $\mathbb{R}$ et on a

$$\begin{aligned}\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} &= \frac{d}{d\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i2\pi\alpha t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\alpha}\left[f(t)\, e^{-i2\pi\alpha t}\right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} -i2\pi t f(t)\, e^{-i2\pi\alpha t}dt = -i2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, e^{-i2\pi\alpha t}dt = -i2\pi F[t f(t)]\end{aligned}$$

Généralisation Ce résultat se généralise aux dérivées successives de $F(\alpha)$ par

$$\frac{d^n F(\alpha)}{d\alpha^n} = (-i2\pi)^n F[t^n f(t)] \tag{2.3.12}$$

Exemple 2.3.1 *Soit* $f(t) = e^{-t^2}$. *En utilisant les propriétés* (2.3.8) *et* (2.3.11) *calculer la transformée de Fourier de* $f(t)$

on a

$$f'(t) = -2te^{-t^2} = -2tf(t) \Leftrightarrow F\left(f'(t)\right) = -2F(tf(t))$$

de (2.3.8) *et* (2.3.11), *on a*

$$\begin{aligned} i2\pi\alpha F(\alpha) &= -2\left(\frac{1}{-i2\pi}\frac{dF(\alpha)}{d\alpha}\right) \\ &\Leftrightarrow \int \frac{dF(\alpha)}{F(\alpha)} = \int -2\pi^2\alpha d\alpha \\ &\Leftrightarrow \ln(F(\alpha)) = -\pi^2\alpha^2 + c \Leftrightarrow F(\alpha) = e^{-\pi^2\alpha^2+c} = Ae^{-\pi^2\alpha^2}\end{aligned}$$

calculer A. *on a*

$$\begin{aligned} F(0) &= A \\ &\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i2\pi(0)t}dt = A \\ &\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = A \Leftrightarrow \sqrt{\pi} = A\end{aligned}$$

Finalement $F(\alpha) = F(f(t)) = \sqrt{\pi}e^{-\pi^2\alpha^2}$.

2.3.10 Convolution et transformation de Fourier

Comme dans (1.1.14), on définit le produit de convolution de deux fonctions f et g appartenant à $L^1(\mathbb{R})$ par la formule

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

On peut montrer que $f * g = g * f$ appartient aussi à $L^1(\mathbb{R})$. Donc la transformée de Fourier de cette fonction est donnée par

$$F[(f * g)(t)] = F(f(t)) . F(g(t)) \tag{2.3.13}$$

et

$$F^{-1}(f(\alpha)\, g(\alpha)) = F^{-1}(f(\alpha)) * F^{-1}(g(\alpha)) \tag{2.3.14}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} F[(f * g)(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(t)\, e^{-i2\pi\alpha t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \right) e^{-i2\pi\alpha t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} f(\tau)\, g(t-\tau) \right) e^{-i2\pi\alpha t} dt d\tau \end{aligned} \tag{2.3.15}$$

Effectuons le changement de variables $t - \tau = v$, $dt = dv$, dans l'intégrale $(2.3.15)$, on obtient

$$F[(f * g)(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(\tau)\, g(v)\, e^{-i2\pi\alpha(v+\tau)} dv d\tau \tag{2.3.16}$$

L'intégrale double (2.3.16) est le produit (ordinaire) de deux intégrales simples

$$\begin{aligned} F[(f * g)(t)] &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, e^{-i2\pi\alpha\tau} d\tau \right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(v)\, e^{-i2\pi\alpha v} dv \right] \\ &= F(f(t)) . F(g(t)) \end{aligned}$$

Pour (2.3.14) , on a

$$\begin{aligned} F\left[F^{-1}(f(\alpha)) * F^{-1}(g(\alpha))\right] &= F\left[F^{-1}(f(\alpha))\right].F\left[F^{-1}(g(\alpha))\right] \\ &= f.g \end{aligned}$$

donc, par inversion

$$F^{-1}(f(\alpha)) * F^{-1}(g(\alpha)) = F^{-1}(f.g)$$

2.3.11 Continuité et bornitude

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f}(\alpha)$ est continue et bornée. On a aussi

$$\sup\left|\widehat{f}\right| \leq \|f\|_{L^1}$$

Preuve. Soit $g(x,\alpha) = f(x)\, e^{-i2\pi\alpha x}$.

1- $\widehat{f}$ est bornée (voir (2.2.3)).

2- $\widehat{f}$ est continue. Montrons que pour toute suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers α, on a

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \widehat{f}(\alpha_n) = \widehat{f}(\alpha)$$

On pose $g_n(x) = g(x,\alpha_n)$. Les hypothèses du théorème de convergence dominée étant vérifiées, on a donc :

$$\begin{aligned} \lim_{n\longrightarrow\infty} \widehat{f}(\alpha_n) &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-i2\pi\alpha_n x} dx \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_{\mathbb{R}} g(x,\alpha_n)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\longrightarrow\infty} g(x,\alpha_n)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x,\alpha)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-i2\pi\alpha x} dx = \widehat{f}(\alpha) \end{aligned}$$

3- $\sup\left|\widehat{f}\right| \leq \|f\|_{L^1}$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, de (2.2.3) on a

$$\left|\widehat{f}(\alpha)\right| \leq \|f\|_{L^1}$$

D'où $\sup\left|\widehat{f}\right| \leq \|f\|_{L^1}$.

2.4 Transformées de Fourier usuelles

$f : t \longrightarrow f(t)$	$F(f(t)) = F(\alpha)$
$1_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$(b-a)\, e^{-i(a+b)\pi\alpha}\, \mathrm{sinc}(b-a)\pi\alpha)$
$H(t)\, e^{-at}$, tq $a \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(a) > 0$, $H(t) \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{1}{a+2i\pi\alpha}$
$e^{-a\|t\|}$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2\alpha^2}$
e^{-wt^2}, $w > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{w}} e^{\frac{-\pi^2}{w}\alpha^2}$
$\frac{1}{a+2i\pi t}$	$H(-\alpha)\, e^{a\alpha}$
$\frac{1}{a-2i\pi t}$	$H(\alpha)\, e^{a\alpha}$
$\mathrm{sinc}(t)$	$\pi 1_{\left[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}\right]}(\alpha)$
$sgn(t)\, e^{-a\|t\|}$, tq $sgn(t) = \begin{cases} -1 & si \quad t < 0 \\ 0 & si \quad t = 0 \\ 1 & si \quad t > 0 \end{cases}$	$\frac{-4i\pi\alpha}{a^2+4\pi^2\alpha^2}$
$H(t)\, \frac{t^k}{k!} e^{-at}$	$\frac{1}{(a+2i\pi\alpha)^{k+1}}$
$H(-t)\, \frac{t^k}{k!} e^{at}$	$\frac{-1}{(-a+2i\pi\alpha)^{k+1}}$

(2.4.1)

2.5 Application à la résolution des équations différentielles

Dans certaines situations, notamment pour ce qui concerne les équations différentielles, il est possible d'exploiter les propriétés remarquables de certaines transformations comme la transformée de Fourier pour résoudre certaines de ces équations. Plus généralement

– La transformée de Fourier est adaptée à la résolution de certaines équations différentielles linéaires sur tout l'espace $\mathbb{R}$.

– La transformée de Fourier est adaptée à la résolution de certaines EDP.

2.5.1 Application à les équations différentielles ordinaires

Principe :

$$\boxed{\text{EDO pour } f(t)} \xrightarrow{F} \boxed{\text{équ algéb } F\left(f\left(t\right)\right) = F\left(\alpha\right)} \xrightarrow{\text{solution}} \boxed{F\left(\alpha\right)} \xrightarrow{F^{-1}} \boxed{\text{sol } f(t) \text{ de EDO}}$$

Exemple 2.5.1 *Résoudre l'EDO*

$$f^{''}\left(t\right) + 2f'\left(t\right) + f\left(t\right) = g\left(t\right)$$

ou $g \in L^1\left(\mathbb{R}\right) \cap C^2\left(\mathbb{R}\right)$ *est à dérivées bornées. On cherche une solution* f *deux fois dérivable et dans* $L^1\left(\mathbb{R}\right)$ *ainsi que ses dérivées. En prenant la transformée de Fourier de l'EDO, on obtient par linéarité*

$$F\left(f^{''}\left(t\right)\right) + 2F\left(f'\left(t\right)\right) + F\left(f\left(t\right)\right) = F\left(g\left(t\right)\right)$$

de $(2.3.10)$, *on trouve*

$$\left(i2\pi\alpha\right)^2 F\left(\alpha\right) + 2\left(i2\pi\alpha\right)^1 F\left(\alpha\right) + F\left(\alpha\right) = F\left(g\left(t\right)\right)$$

alors

$$\left((i2\pi\alpha)^2 + 2\,(i2\pi\alpha) + 1\right) F\,(\alpha) = F\,(g\,(t))$$

donc, on a

$$F\,(\alpha) = F\,(g\,(t))\,\frac{1}{((i2\pi\alpha) + 1)^2}$$

Pour conclure, il suffit de revenir à f par inversion. Pour cela on remarque que

$$\frac{1}{((i2\pi\alpha) + 1)^2} = F\left(H\,(t)\,\frac{t}{1!}e^{-t}\right), \textit{ voir } (2.4.1)$$

donc, par (2.3.13) *on obtient*

$$F\,(\alpha) = F\,(g\,(t))\,F\left(H\,(t)\,\frac{t}{1!}e^{-t}\right) = F\left[(g\,(t)) * \left(H\,(t)\,te^{-t}\right)\right]$$

Par inversion, on obtient la solution de l'EDO de départ

$$f\,(t) = (g\,(t)) * \left(H\,(t)\,te^{-t}\right) = \int_{\mathbb{R}} g\,(t-s)\,H\,(s)\,se^{-s}ds.$$

2.5.2 Application à les équations aux dérivées partielles

Principe :

$$\boxed{\text{EDP pour } u\,(t,x)} \xrightarrow{F} \boxed{\text{EDO de } F\,(u\,(t,x))} \xrightarrow{\text{solution}} \boxed{F\,(u\,(t,x))} \xrightarrow{F^{-1}} \boxed{\text{sol } u\,(t,x) \text{ de EDP}}$$

Exemple 2.5.2 ***(Equation de la chaleur)***

Soit l'équation de la chaleur suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = 0, & (t,x) \in \left]0,+\infty\right[\times \mathbb{R} \\ u\,(0,x) = u_0\,(x)\,, \quad u_0\,(x) \in L^1\,(\mathbb{R}) & \end{cases} \tag{2.5.1}$$

on a

$$\begin{aligned} F\left(u\left(t,x\right)\right) &= \int_{\mathbb{R}} u\left(t,x\right)e^{-i2\pi\alpha x}dx \\ u\left(t,x\right) &= F^{-1}\left(F\left(u\left(t,x\right)\right)\right) = \int_{\mathbb{R}} F\left(u\left(t,x\right)\right)e^{i2\pi\alpha x}d\alpha \\ F\left(\frac{\partial u\left(t,x\right)}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}F\left(u\left(t,x\right)\right) \\ F\left(\frac{\partial^2 u\left(t,x\right)}{\partial x^2}\right) &= \left(2i\pi\alpha\right)^2 F\left(u\left(t,x\right)\right) \end{aligned}$$

Alors la transformée de Fourier de l'équation (2.5.1) *s'écrit*

$$\frac{\partial}{\partial t}F\left(u\left(t,x\right)\right) - \left(2i\pi\alpha\right)^2 F\left(u\left(t,x\right)\right) = 0 \tag{2.5.2}$$

L'équation (2.5.2) *est une équation du première ordre, on intégrer*

$$\ln\left(F\left(u\left(t,x\right)\right)\right) = \left(2i\pi\alpha\right)^2 t + c$$

Donc on a

$$F\left(u\left(t,x\right)\right) = Ke^{(2i\pi\alpha)^2 t}, \quad K = e^c \tag{2.5.3}$$

par la condition initiale, on trouve

$$K = F\left(u_0\left(x\right)\right)$$

par suite, de (2.5.3) *on obtient*

$$F\left(u\left(t,x\right)\right) = F\left(u_0\left(x\right)\right)e^{(2i\pi\alpha)^2 t}$$

Posons $F\left(u_0\left(x\right)\right) = \Phi\left(\alpha\right)$, *par inversion, on obtient la solution de l'EDP de départ*

$$u\left(t,x\right) = F^{-1}\left(\Phi\left(\alpha\right)e^{(2i\pi\alpha)^2 t}\right)$$

De $(2.3.14)$ *, alors*

$$u(t,x) = F^{-1}(\Phi(\alpha)) * F^{-1}\left(e^{(2i\pi\alpha)^2 t}\right) \tag{2.5.4}$$

on a

$$F^{-1}(\Phi(\alpha)) = u_0(x) \tag{2.5.5}$$

et

$$\begin{aligned} F^{-1}\left(e^{(2i\pi\alpha)^2 t}\right) &= \int_{\mathbb{R}} e^{(2i\pi\alpha)^2 t} e^{i2\pi\alpha x} d\alpha \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-4\pi^2\alpha^2 t + i2\pi\alpha x} d\alpha \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-4\pi^2 t\left(\alpha^2 - \frac{ix}{2\pi t}\alpha\right)} d\alpha \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-4\pi^2 t\left[\left(\alpha - \frac{ix}{4\pi t}\right)^2 - \left(\frac{ix}{4\pi t}\right)^2\right]} d\alpha \\ &= e^{-4\pi^2 t\left[-\left(\frac{ix}{4\pi t}\right)^2\right]} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left[2\pi\sqrt{t}\left(\alpha - \frac{ix}{4\pi t}\right)\right]^2} d\alpha \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

On pose $z = 2\pi\sqrt{t}\left(\alpha - \frac{ix}{4\pi t}\right)$ *alors* $dz = 2\pi\sqrt{t}d\alpha$*, de* $(2.5.6)$ *on obtient*

$$\begin{aligned} F^{-1}\left(e^{(2i\pi\alpha)^2 t}\right) &= e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-[z]^2} \frac{dz}{2\pi\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-[z]^2} dz \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \left(\sqrt{\pi}\right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

Donc finalement, de $(2.5.4), (2.5.5)$ *, et* $(2.5.7)$ *on trouve la solution de l'EDP* $(2.5.1)$

$$\begin{aligned} u(t,x) &= [u_0(x)] * \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} u_0(x-k) \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{k^2}{4t}} dk \end{aligned}$$

2.6 Transformation de Fourier pour les fonctions de carré sommable

Conservation de la norme

Nous avons jusqu'ici donné la définition de la transformée de Fourier des fonctions appartenant à l'espace L^1 des fonctions intégrables, tout en indiquant qu'on peut aussi définir la transformée de Fourier dans d'autres cas. Un cas pratique important en physique, notamment en mécanique quantique et en optique, est celui des fonctions appartenant à l'espace L^2 des fonctions de carré sommable (c'est-à-dire de carré intégrable), telles que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, dt < +\infty.$$

Entre les fonctions $f(x)$ et $F(\alpha) = F(f(x))$, on a formule de Plancherel

Théorème 2.6.1 ***(Formule de Plancherel)*** *La transformée de Fourier se prolonge de manière unique en une isométrie bijective*

$$\begin{array}{rccc} F: & L^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & F(f) \end{array}$$

vérifiant

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, dt = \int_{\mathbb{R}} |F(f)(\alpha)|^2 \, d\alpha$$

Preuve. Voir ([6], chapitre 1).

Chapitre 3

Transformation de Laplace

Dans ce chapitre, nous présentons la transformée de Laplace et ses propriétés ainsi que son utilisation pour résoudre des equations différentielles ordinaires linéaires (EDO) d'ordre n et certain EDP.

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présenterons une transformation qui est un représentant important d'une grande classe d'opérateurs intégraux, cette transformation constitue une méthode puissante pour résoudre les équations différentielles linéaires, et certaines équations intégrales et équations aux dérivées partielles.

Cette transformation réduit le problème de résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants à un problème algébrique

3.1.1 Intégrales généralisées

Soit une fonction f définie et continue sur $[a, +\infty[$: On définit l'intégrale généralisée de f entre a et $+\infty$ par

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\int_a^x f(x)\,dx \right) \tag{3.1.1}$$

L'intégrale généralisée n'a un sens que si la limite qui figure dans le membre de droite de (3.1.1) est finie. On dit alors que l'intégrale est convergente. Dans le cas contraire, l'intégrale généralisée est divergente.

Exemple 3.1.1 *L'intégrale généralisée $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est-elle convergente ? Pour répondre à cette question, calculons, pour tout $x \geq 0$*

$$I(x) = \int_1^x \frac{1}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{x}$$

On a $\lim_{x \longrightarrow +\infty} I(x) = 1$. Donc I est convergente et $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$.

3.1.2 Fonctions causales

Dans les applications, on étudie des phénomènes qui dépendent du temps, et qui commencent à un instant précis qu'on prend pour origine. On appelle donc fonction causale toute fonction $y = f(t)$ vérifiant $f(t) = 0$ pour $t < 0$.

Exemple 3.1.2 *La fonction échelon-unité, ou fonction de Heaviside, est définie par*

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

La fonction échelon-vitesse, ou fonction rampe, est

$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

3.2 Transformation de Laplace

Définition 3.2.1 *Soit $y = f(t)$ une fonction causale. Sa transformée de Laplace est la fonction $F(p)$ définie par*

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt} dt$$

On note $F(p) = L[f(t)]$.

Exemple 3.2.1 *a) Soit la fonction de Heaviside* $u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

on a

$$L[u(t)] = \int_0^{+\infty} u(t)\, e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p} \text{ si } \mathrm{Re}(p) > 0$$

b) Soit $f(t) = u(t)\, e^{\alpha t} = \begin{cases} e^{\alpha t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ *avec* $\alpha \in \mathbb{C}$.

on a

$$L[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \frac{1}{p-\alpha} \text{ si } \mathrm{Re}(p) > \mathrm{Re}(\alpha)$$

3.2.1 Transformée inverse

Comme nous l'avons vu, la transformation de Laplace est trés intéressante lorsque l'on veut simplifier des calculs, par exemple sur une équation différentielle. Toutefois, cette démarche passe par le calcul de la transformée de Laplace de la solution de l'équation. Il serait bon de pouvoir, ayant obtenu cette fonction, revenir à la fonction de départ. Ceci s'effectue par transformée de Laplace inverse. Toutefois, il faut etre sur que cette reconstruction peut se faire de manière unique.

Si la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ est $F(p)$ c-à-d. $L\{f(t)\}(p) = F(p)$, alors $f(t)$ est appelée transformée de Laplace inverse de $F(p)$ et nous écrivons

$$f(t) = L^{-1}\{F(p)\}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} F(p)e^{pt}ds.$$

Exemple 3.2.2 *1-* $F(p)\ \frac{3p+7}{p^2-2p-3} = \frac{4}{p-3} - \frac{1}{p+1}$ *donc* $f(t) = \left(4e^{3t} - e^{-t}\right)u(t)$

2- $F(p)\ \frac{3p+1}{(p-1)(p^2+1)} = \frac{2}{p-1} + \frac{-2p+1}{p^2+1}$ *donc* $f(t) = 2e^t - 2\cos(t) + \sin(t)$

Définition 3.2.2 *une fonction f est dite d'ordre exponentiel, si on peut trouver une constante réelle M et $\alpha > 0$ tels que*

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \forall t > T$$

3.2.2 Conditions d'existence

$F(p)$ est définie par une intégrale généralisée, donc il faut que :

1- F soit continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$

2- $\exists\beta \in]0,1[$ tel que $\lim\limits_{t\to 0} t^\beta |f(t)| = 0$

3- La fonction f est d'ordre exponentiel $|f(t)e^{-pt}| \leq Me^{-(\operatorname{Re} p-\alpha)t}$ or $\int_0^{+\infty} e^{-(\operatorname{Re} p-\alpha)t}dt$ converge pour $\operatorname{Re} p > \alpha$.

Remarque 3.2.1 *Certaines fonctions ne possèdent pas de transformée de Laplace, par exemple la fonction $f(t) = \frac{1}{t}$ qui ne respecte pas la deuxième condition d'éxistence, ou $f(t) = e^{t^2}$ qui n'est pas d'ordre exponentielle.*

3.3 Propriétés de la transformation de Laplace

3.3.1 Linéarité

Soient $f, g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions admettant des transformées de Laplace $F(p)$ et $G(p)$, et soient α,β deux réels, alors

$$L\left[\alpha f(t) + \beta g(t)\right](p) = \alpha L\left[f(t)\right](p) + \beta L\left[g(t)\right](p)$$

Preuve.

L'intégration étant une opération linéaire, donc la transformation de Laplace l'est aussi.

Exemple 3.3.1 *Grace à cette propriété, on peut déterminer la transformée de sinus et cosinus :*

$$\begin{aligned} \cos(at) &= \frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2} \Leftrightarrow \\ L\left[\cos(at)\right](p) &= \frac{1}{2}\left[L\left(e^{iat}\right)(p) + L\left(e^{-iat}\right)(p)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-ia}+\frac{1}{p+ia}\right] \\ &= \frac{p}{p^2+a^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sin(at) &= \frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i} \Leftrightarrow \\ L\left[\sin(at)\right](p) &= \frac{1}{2i}\left[L\left(e^{iat}\right)(p) - L\left(e^{-iat}\right)(p)\right] = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p-ia}-\frac{1}{p+ia}\right] \\ &= \frac{a}{p^2+a^2} \end{aligned}$$

3.3.2 Transformée d'une translation

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction admettant une transformée de Laplace F(p). On note

$$f_a(t) = \begin{cases} f(t-a) & \text{si } t \geq a \\ 0 & \text{si } t \prec a \end{cases}$$

alors

$$L\left[f_a\left(t\right)\right](p) = e^{-pa}L\left[f\left(t\right)\right](p)$$

Preuve. On effectue le changement de variable $u = t - a$, $du = dt$

$$L\left[f_a\left(t\right)\right](p) = \int_0^{+\infty} f\left(t-a\right)e^{-pt}dt = \int_{-a}^{+\infty} f\left(u\right)e^{-p(u+a)}du = e^{-pa}\int_{-a}^{+\infty} f\left(u\right)e^{-pu}du = e^{-pa}L\left[f\left(t\right)\right](p)$$

3.3.3 Transformée d'une homothétie

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction admettant une transformée de Laplace $F(p)$, et soit $k > 0$

$$L\left[f\left(kt\right)\right](p) = \frac{1}{k}F\left(\frac{p}{k}\right)$$

Preuve. On effectue le changement de variable $u = kt$, $du = kdt$

$$L\left[f\left(kt\right)\right](p) = \int_0^{+\infty} f\left(kt\right)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} f\left(u\right)e^{-p\left(\frac{u}{k}\right)}\frac{du}{k} = \frac{1}{k}\int_0^{+\infty} f\left(u\right)e^{-\frac{p}{k}u}du = \frac{1}{k}F\left(\frac{p}{k}\right)$$

3.3.4 Transformée d'une dérivée

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continument dérivable et admettant une transformée de Laplace $F(p)$

$$L\left[f'\left(t\right)\right](p) = pL\left[f\left(t\right)\right](p) - f(0), \quad p > 0$$

Preuve. On intégre par partie

$$\begin{aligned} L\left[f'\left(t\right)\right](p) &= \int_0^{+\infty} f'\left(t\right)e^{-pt}dt \\ &= \left[f\left(t\right)e^{-pt}\right]_0^{+\infty} - (-p)\int_0^{+\infty} f\left(t\right)e^{-pt}dt \\ &= pL\left[f\left(t\right)\right](p) - f(0) \end{aligned}$$

Remarque 3.3.1 *On montre par récurrence les formules suivantes*

$$L\left[f''(t)\right](p) = p^2 L\left[f(t)\right](p) - pf(0) - f'(0)$$
$$L\left[f^{(3)}(t)\right](p) = p^3 L\left[f(t)\right](p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0)$$

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction vérifiant : $f \in C^n(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, $\exists M > 0$ et a réel tel que $\forall k \leq n$ on a $\left|f^{(k)}(t)\right| \leq Me^{at}$, alors

$$L\left[f^{(n)}(t)\right](p) = p^n L\left[f(t)\right](p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0)$$

Preuve. La démenstration est par récurrence comme à la remarque pour $n = 2$ et $n = 3$.

3.3.5 Transformée de l'intégrale

Soit $g(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$, alors

$$L\left[g(t)\right](p) = L\left[\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right](p) = \frac{L\left[f(t)\right](p)}{p} \tag{3.3.1}$$

Preuve. On a $g(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$, alors $g'(t) = f(t)$ et

$$L\left[f(t)\right](p) = L\left[g'(t)\right](p) = pL\left[g(t)\right](p) - g(0)$$

Puisque $g(0) = 0$, on a $L\left[f(t)\right](p) = pL\left[g(t)\right](p)$, d'ou (3.3.1).

3.3.6 Derivée et intégrale de transformeé de Laplace

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ admettant une transformée de Laplace $F(p)$

$$L\left[tf(t)\right](p) = -F'(p) \tag{3.3.2}$$

On généralise la formule (3.3.2)

$$L\left[t^{n} f\left(t\right)\right](p) = \left(-1\right)^{n} F^{(n)}(p)$$

De plus, si $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} \frac{f(t)}{t}$ existe, alors

$$L\left[\frac{f\left(t\right)}{t}\right](p) = \int_{p}^{+\infty} F(s)ds.$$

Preuve. (voir TD)

3.3.7 Convolution

Soient $f, g : \mathbb{R}_{+} \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions admettant des transformées de Laplace $F(p)$ et $G(p)$, alors

$$L\left[\left(f * g\right)\left(t\right)\right](p) = L\left[\left(f\right)\left(t\right)\right](p) . L\left[\left(g\right)\left(t\right)\right](p) = F(p).G(p)$$

3.3.8 Quelques transformées usuelles

$f : t \longrightarrow f(t)$	$L(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = F(p)$
$u(t)$	$\frac{1}{p}$
$t^n u(t)$, $n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t^\alpha u(t)$, $\alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
$e^{\alpha t} u(t)$	$\frac{1}{p-\alpha}$
$\sin(at) u(t)$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
$\cos(at) u(t)$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
$sh(at) u(t)$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
$ch(at) u(t)$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
$\frac{1}{b-a}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$
te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$

3.4 Application

3.4.1 Résolution des équations différentielles ordinaires (EDO)

Nous avons vu que les EDO linéaires du 1^{er} ordre et $2^{ième}$ ordre à coefficients constants se résolvent facilement à l'aide d'une méthodologie claire et systématique. Par contre ces techniques ne s'appliquent pas aux EDO d'ordre plus élevée (même lorsque celles-ci sont linéaires). Nous présentons dans ce paragraphe tout l'intérêt de la transformée de Laplace : résoudre une EDO linéaire d'ordre n.

Soit donnée une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f(t)$$

On demande de trouver la solution $y = y(t)$ pour $t \geq 0$ de cette équation et vérifiant les conditions initiales

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$$

On cherche la transformée de Laplace des deux membres de l'équation :

$$L\left(a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y\right) = L\left(f(t)\right)$$

En utilisant les propriétés de linéarité

$$a_0 L\left(y^{(n)}\right)(p) + a_1 L\left(y^{(n-1)}\right)(p) + ... + a_{n-1} L\left(y'\right)(p) + a_n L\left(y\right)(p) = L\left(f(t)\right)(p)$$

Sachant que

$$L\left[f^{(n)}(t)\right](p) = p^n L\left[f(t)\right](p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0)$$

La transformée de Laplace permet de convertir une équation différentielle en une équation algébrique, dont la solution est la transformée de la solution $y(t)$ de notre équation différentielle . Pour finir, on utilise la transformée de Laplace inverse pour déterminer la solution.

Exemple 3.4.1 *Résoudre*

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 4e^{3t}, \text{ avec } x(0) = 4, \; x'(0) = 9$$

on a

$$\begin{aligned}
L\left(x''(t) - 3x'(t) + 2x(t)\right)(p) &= L\left(4e^{3t}\right)(p) \\
L\left(x''(t)\right)(p) - L\left(3x'(t)\right)(p) + L\left(2x(t)\right)(p) &= L\left(4e^{3t}\right)(p) \\
p^2 X - px(0) - x'(0) - 3(pX - x(0)) + 2X &= \frac{4}{p-3} \\
\left(p^2 - 3p + 2\right) X &= \frac{4}{p-3} + 4p - 3
\end{aligned}$$

d'ou

$$\begin{aligned} X &= L\left(x(t)\right)(p) \\ &= \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-2} + \frac{1}{p-3} \\ &= L\left(e^{t} + e^{2t} + 2e^{3t}\right)(p) \end{aligned}$$

donc

$$x(t) = e^{t} + e^{2t} + 2e^{3t}$$

3.4.2 Résolution des équations aux dérivées partielles :

Si on suppose que la fonction $u\left(x,t\right)$ admet une transformée de Laplace lorsqu'elle est considérée comme fonction de t et que

$$\begin{aligned} u(x,p) &= \int_{0}^{+\infty} u(x,t)e^{-pt}dt \ \text{ converge normalement pour } p > p_0 \\ L\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) &= pU\left(x,p\right) - u(x,0) \\ L\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) &= p^2U\left(x,p\right) - pu(x,0) - \frac{\partial u}{\partial t}\left(x,0\right) \\ L\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) &= \frac{dU}{dx} \text{ et } L\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{d^2U}{dx^2} \end{aligned}$$

En utilisant la transformée de Laplace, une équation aux dérivées partielles se transforme en une équation différentielle ordinaire. On choisit de transformer le problème par rapport à l'une des deux variables, selon les conditions initiales et les données.

Exemple 3.4.2 *soit le problème*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}\left(x,t\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x,t\right) - 4u(x,t) \\ u\left(0,t\right) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = -6\sin(x) - 4\sin(2x) \end{cases}$$

En utilisant la transformée de Laplace par rapport à la variable, on obtient :

$$\frac{d^2U}{dx^2}(x,p) - (p+4)\,U(x,p) = -6\sin x + 4\sin 2x$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont la solution générale est

$$U_0(x,p) = c_1 e^{\sqrt{p+4x}} + c_2 e^{-\sqrt{p+4x}}$$

Et la solution particulière

$$U_1(x,p) = \frac{6}{p+5}\sin x - \frac{4}{p+8}\sin 2x$$

Mais d'après les conditions aux limites

$$c_1 = c_2 = 0, \;\; d'ou$$

$$u(x,t) = 6e^{-5t}\sin x - 4e^{-8t}\sin 2x.$$

Chapitre 4

Travaux Dirigés

Dans ce chapitre, nous donnons des travaux dirigés sur les chapitres précédents.

4.1 TD (Les espaces L^p)

Exercice 4.1.1 *Soit* $(X, A, \mu) \equiv (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$ *un espace mesuré, tq où* X *est un ensemble,* A *une tribu sur* X *et* μ *une mesure sur* A.

1- Soit

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \frac{1}{1+|x|}$$

et

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si\ x \geq 1 \\ 0 & si\ x \prec 1 \end{cases}$$

Est ce que $f \in L^1(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$, $f \in L^2(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$, $g \in L^2(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$.

2- Soit

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ x \mapsto h(x) = \begin{cases} +\infty & si\ x = 0 \\ 0 & si\ x \neq 0 \end{cases}$$

Montrer que $h \in L^\infty(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$.

Exercice 4.1.2 *Soit* $(X, A, \mu) \equiv (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$ *un espace mesuré. Soit*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} 1_{]0,1]}(x)$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = \frac{1}{x} 1_{[1,+\infty[}(x).$$

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ x \mapsto h(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \notin \mathbb{Q} \\ \infty & si\ x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

et

$$k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto k(x) = \begin{cases} x & si\ x \notin \mathbb{Q} \\ \infty & si\ x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Est ce que $f, g \in L^1(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$, $f, g \in L^2(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$. $h \in L^\infty(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$, $k \in L^\infty(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$.

Exercice 4.1.3 *Soit* h, k, m,

$$h(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & si\ x\notin\mathbb{Q}\\ 1 & si\ x\ \in\mathbb{Q}\end{cases}\qquad k(x)=\begin{cases}-1 & si\ x\notin\mathbb{Q}\\ \infty & si\ x\ \in\mathbb{Q}\end{cases}\qquad m(x)=\begin{cases}x & si\ x\neq -1\\ 5 & si\ x\ =-1\end{cases}$$

Calculer $\|h\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$, $\|k\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$, $\|m\|_{L^\infty([-2,3])}$.

Exercice 4.1.4 *Soit*

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ x\mapsto f(x)=\begin{cases}x^\alpha & si\ 0\leq x\leq 1\\ 0 & si\ x\ \prec 0\end{cases}$$

1- Trouver la valeur de α *telle que* $f\in L^{\frac{3}{2}}(]-\infty,1])$.

2- Trouver la valeur de α *telle que* $f\notin L^1(]-\infty,1])$.

Exercice 4.1.5 *Soit*

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ x\mapsto f(x)=\begin{cases}x^\alpha & si\ 0\leq x\leq 1\\ x^\beta & si\ -5\leq x\ \prec 0\end{cases}$$

Trouver la valeur de α *et de* β, *telle que* $f\in L^{\frac{5}{2}}([-5,1])$.

Exercice 4.1.6 *Soient* f, $g\in L^3(\mathbb{R})$. *Démontrer que* f^2g *est intégrable.*

Exercice 4.1.7 *Soit* $p,q,r\geq 1$ *tels que* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$. *Soient* $f\in L^p(\mu)$ *et* $g\in L^q(\mu)$. *Démontrer que* $fg\in L^r(\mu)$ *et que*

$$\|fg\|_r\leq\|f\|_p\|g\|_q$$

Exercice 4.1.8 *Soit* (Ω,A,μ) *un espace mesuré,* $p\in[1,+\infty[$ *et soit* $g\in L^q(\Omega)$, *où* q *est l'exposant conjugué de* p.

Soit $T:L^p(\Omega)\longrightarrow\mathbb{C}$ *définie par* $T(f)=\int_\Omega f\ \bar{g}\ d\mu$.

1- Montrer que T *est définie et continue. Montrer que* $\|T\|\leq\|g\|_q$.

2- Soit

$$f(x) = \begin{cases} g(x)\,|g(x)|^{\;q-2} & si\ g(x) \neq 0 \\ 0 & si\ g(x) = 0 \end{cases}$$

Montrer que $\|f\|_p^p = \|g\|_q^q$, *Calculer* $T(f)$ *,déduire que* $\|T\| = \|g\|_q$.

Exercice 4.1.9 *Soient la mesure de Lebesgue est finie* $(\mu(\Omega) \prec \infty)$ *et* $1 \leq p < \infty$.

Montrer que si $q \leq p$, alors $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$. En particulier, pour $1 < q < 2 < p < \infty$, on a :

$$L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$

Exercice 4.1.10 *Soit* $(X, A, \mu) \equiv (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$ *un espace mesuré. Soit*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = \begin{cases} \infty & si\ x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & si\ x\ \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Est ce que $f \in L^\infty(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$.

Exercice 4.1.11 *Soit la fonction porte*

$$f(t) = \Pi_{[-1,1]}(t) = \begin{cases} 1 & si\ \ |t| \leq 1 \\ 0 & si\ \ |t|\ \ > 1 \end{cases}$$

Calculer $(f * f)(x)$.

4.2 TD (Transformation de Fourier)

Exercice 4.2.1 *Calculer la transformée de Fourier des fonctions suivants :*

$$\Lambda_1(t) = f(t) = \begin{cases} 1 + t & si\ -1 \leq t \leq 0 \\ 1 - t & si\ 0 \leq t\ \prec 1 \\ 0 & sinon \end{cases} \qquad La\ fonction\ triangle.$$

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & si\ t = 0 \\ 0 & sinon \end{cases} \quad avec \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1. Impulsion\ unitaires\ (Dirac)$$

en déduire la transformée de Fourier de $\delta(t - t_0)$.

Exercice 4.2.2 *Calculer la transformée de Fourier des fonctions suivants :*

$$g(t) = e^{-at^2}, Poura > 0$$

$$h(t) = \begin{cases} e^{-t} & si\ t \geq 0 \\ -e^{t} & si\ t \prec 0 \end{cases}$$

Exercice 4.2.3 *1- Déterminer les transformées de Fourier des fonctions*

$$f(t) = \Pi_{[-T,T]}(t) = \begin{cases} 1 & si\ |t| \leq T \\ 0 & si\ |t| > T \end{cases} \quad La\ fonction\ porte.$$

$$g(t) = e^{\frac{-|t|}{T}}.$$

2- A l'aide de la formule de réciprocité, en déduire la transformée de Fourier de

$$h(t) = \frac{\sin(t)}{t}, \quad k(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}.$$

Exercice 4.2.4 *1- Déterminer les transformées de Fourier de fonction*

$$f(t) = e^{-\alpha|t|}, \quad \alpha > 0$$

2- A l'aide de la formule de réciprocité, en déduire la transformée de Fourier de

$$g(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

3- Calculer $f \star f$, calculer ainsi la transformée de Fourier de

$$f \star f \ , \ h(t) = \frac{1}{(1+t^2)^2}.$$

4- En déduire la transformée de Fourier de

$$k(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2}.$$

Exercice 4.2.5 *Soit f une fonction réelle. Montrer que*

1- Si la fonction f est réelle et paire alors

$$\mathcal{F}\left(f(t)\right)(\alpha) = F(\alpha) = 2\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2\pi\alpha t)\,dt$$

2- Si f est réelle et impaire alors

$$\mathcal{F}\left(f(t)\right)(\alpha) = F(\alpha) = 2i\int_0^{+\infty} f(t)\sin(2\pi\alpha t)\,dt$$

Exercice 4.2.6 *Soient f, g deux fonctions et $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que*

$$\mathcal{F}\left(af(t) + bg(t)\right)(\alpha) = a\mathcal{F}\left(f(t)\right)(\alpha) + b\mathcal{F}\left(g(t)\right)(\alpha). \ \textit{Linéarité}$$

$$\mathcal{F}\left(\overline{f(t)}\right)(\alpha) = \overline{F(-\alpha)}. \ \textit{Conjugaison}$$

$$\mathcal{F}\left(f(t-a)\right)(\alpha) = e^{-2i\pi\alpha a}\mathcal{F}\left(f(t)\right)(\alpha). \textit{Translation temporelle}$$

$$\mathcal{F}\left(e^{2i\pi\alpha_0 t}f(t)\right)(\alpha) = F(\alpha - \alpha_0). \ \textit{Translation fréquentielle}$$

$$\mathcal{F}\left(f(at)\right)(\alpha) = \frac{1}{a}F\left(\frac{\alpha}{a}\right), \ a \succ 0. \ \textit{Homothétie}$$

Exercice 4.2.7 *Soient f, g deux fonctions. Montrer que*

$$\mathcal{F}\left(\frac{df(t)}{dt}\right)(\alpha) = 2i\pi\alpha F(\alpha), \ \mathcal{F}\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right)(\alpha) = (2i\pi\alpha)^n F(\alpha)$$

$$\frac{dF\left(f(t)\right)(\alpha)}{d\alpha}=\frac{dF\left(\alpha\right)}{d\alpha}=-i2\pi F\left(tf(t)\right)(\alpha)\,,\frac{d^{n}F\left(f(t)\right)(\alpha)}{d\alpha^{n}}=\frac{d^{n}F\left(\alpha\right)}{d^{n}\alpha}=\left(-i2\pi\right)^{n}F\left(t^{n}f(t)\right)(\alpha)$$

$$F\left(f(t)*g\left(t\right)\right)(\alpha)=F\left(f(t)\right)(\alpha)\,.F\left(g(t)\right)(\alpha)\,.\ \textit{Convolution}$$

Exercice 4.2.8 *1- Déterminer les transformées de Fourier de fonction*

$$f\left(t\right)=a,\quad a\ \textit{constante}$$

2- Déterminer les transformées de Fourier de fonction

$$\Lambda_{1}\left(t\right)=f\left(t\right)=\begin{cases}\tau+t & si\ -\tau\leq t\leq 0\\ \tau-t & si\ 0\leq t\ \prec\tau\\ 0 & sinon\end{cases}\qquad \textit{La fonction triangle.}$$

Exercice 4.2.9 *Déterminer les transformées de Fourier des fonctions*

$$f\left(t\right)=e^{i\alpha t},\ \ \cos\left(\alpha t\right),\ \ \sin\left(\alpha t\right),$$

Exercice 4.2.10 *Déterminer les transformées de Fourier de*

$$sgn\left(t\right)=\begin{cases}1 & si\ t\succ 0\\ 0 & si\ t\ =0\\ -1 & si\ t\prec 0\end{cases}$$

En déduire la transformée de Fourier de

$$H\left(t\right)=U\left(t\right)=\begin{cases}1 & \text{si } t\geq 0\\ 0 & \text{si } t\prec 0\end{cases}\qquad \text{Echlon unité (Heaviside)}$$

tel que

$$sgn\left(t\right)=2U\left(t\right)-1$$

Exercice 4.2.11 *En appliquant la transformation de Fourier, résoudre les équations différen-*

tielles suivantes

$$-y" + y = e^{-t^2}$$

$$y" + 2ty' + 4\pi y = 0$$

$$y' + 2aty = 0$$

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & (t,x) \in \left]0,+\infty\right[\times \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x), & u_0(x) \in L^1(\mathbb{R}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & (t,x) \in \left]0,+\infty\right[\times \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x), & u_0(x) \in L^1(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Exercice 4.2.12 *1- Déterminer la transformée de Fourier de fonction*

$$f(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0.$$

2- En déduire la transformée de Fourier des fonction

$$g(t) = e^{-|t|}, \ h(t) = e^{-2|t|}.$$

3- soit l'équation différentielle suivante

$$-y" + y = e^{-2|t|}, \qquad\qquad (I)$$

a) Montrer que

$$\frac{4}{(1+4\pi^2\alpha^2)(4+4\pi^2\alpha^2)} = \frac{2}{3}\frac{2}{1+4\pi^2\alpha^2} - \frac{1}{3}\frac{4}{4+4\pi^2\alpha^2}.$$

b) Montrer que si $y(t)$ vérifie l'équation différentielle (I), alors

$$F(y(t))(\alpha) = F(\alpha) = \frac{2}{3}\frac{2}{1+4\pi^2\alpha^2} - \frac{1}{3}\frac{4}{4+4\pi^2\alpha^2}.$$

c) En déduire $y(t)$ la solution de l'équation différentielle (I).

4.3 TD (Transformation de Laplace)

Exercice 4.3.1 *Calculer les transformées de Laplace des fonctions causales définies pour $t \geq 0$ par*

$$f(t) = e^{\alpha t}, \quad g(t) = \sin(wt), \quad h(t) = \cos(wt)$$

Exercice 4.3.2 *Déterminer les originaux des fonctions suivantes à l'aide de la table et, éventuellement, de décomposition en éléments simples :*

$$F(p) = \frac{1}{p^2 - 3p + 2}, \quad G(p) = \frac{p+1}{p(p^2+4)}, \quad H(p) = \frac{5}{(p+1)(p^2+4p+8)}$$

Exercice 4.3.3 *Résoudre les problèmes de Cauchy suivants en utilisant la transformation de Laplace*

$$y' + 3y = e{-}^{t}, \quad y(0) = 2$$

$$y" - 4y' + 3y = e^{2t}, \quad y(0) = 0, y'(0) = -2$$

Exercice 4.3.4 *Utiliser la transformation de Laplace pour résoudre le système différentiel*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -7x - 6y + 1 \\ \frac{dy}{dt} = 12x + 10y \end{cases}$$

avec les conditions initiales $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$.

4.4 Les controles

(EXAMEN FINAL 2022)

EXERCICE N1. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x\,(1 + |\ln(x)|)^2}$$

1- En utilisant le changement de variable $(t = \ln(x))$,montrer que $f \in L^1(]0,1])$, $f \in L^1([1,+\infty[)$

2- Soit $p \in]1,+\infty[$, montrer que $f \in L^p([1,+\infty[)$.

3- Montrer que f est strictement décroissant sur $[1,+\infty[$, Est-ce que $f \in L^\infty([1,+\infty[)$.

EXERCICE N2. Soit $a \succ 0$, f définie sur $\mathbb{R}$, $f(t) = e^{-at^2}$

1- Montrer que f est une solution de l'équation différentielle

$$y'(t) + 2aty(t) = 0 \qquad (E)$$

2- À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\mathcal{F}\left(\frac{df(t)}{dt}\right)(\alpha) = \mathcal{F}(f'(t))(\alpha) = 2i\pi\alpha\mathcal{F}(f(t))(\alpha).$$

3- Montrer que

$$\mathcal{F}'(f(t))(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}[\mathcal{F}(f(t))(\alpha)] = \frac{2\pi}{i}\mathcal{F}(tf(t))(\alpha).$$

4- En appliquant la transformation de Fourier à l'équation différentielle (E), montrer que

$$a\mathcal{F}'(f(t))(\alpha) + 2\pi^2\alpha\mathcal{F}(f(t))(\alpha) = 0 \qquad (E')$$

5- Sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, calculer $\mathcal{F}(f(t))(0)$.

6- Montrer que $\mathcal{F}(f(t))(0)\, e^{-\frac{\pi^2\alpha^2}{a}}$ est une solution de l'équation différentielle (E') .

(EXAMEN FINAL 2023)

EXERCICE N1. Soit f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^{\alpha+\beta}.x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n^\alpha} \\ 2n^\beta(1-n^\alpha x) & \text{si } \frac{1}{2n^\alpha} \leq x \leq \frac{1}{n^\alpha} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n^\alpha} \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad \alpha,\beta \in \mathbb{R}_+, \beta \neq 0, n \in \mathbb{N}^*.$$

1- Montrer que

$$\int (1-n^{\alpha}x)^{p}\,dx = \frac{-1}{(p+1)\,n^{\alpha}}(1-n^{\alpha}x)^{p+1}+C$$

2- Trouver les valeurs de p telle que

$$\lim \|f_n - 0\|_{L^p([0,1])} \; = 0 \quad \text{pour } n \longrightarrow +\infty.$$

EXERCICE N2.

1- À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\digamma\left(\frac{df(t)}{dt}\right)(\alpha) = \digamma\left(f'(t)\right)(\alpha) = 2i\pi\alpha\digamma\left(f(t)\right)(\alpha).$$

2- a) Montrer que

$$\digamma'\left(f(t)\right)(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\left[\digamma\left(f(t)\right)(\alpha)\right] = \frac{2\pi}{i}\digamma\left(tf(t)\right)(\alpha).$$

b) En déduire que

$$\digamma\left(tf'(t)\right)(\alpha) = -\alpha\digamma'\left(f(t)\right)(\alpha) - \digamma\left(f(t)\right)(\alpha) = -\alpha\digamma'(\alpha) - \digamma(\alpha)$$

3- Soit l'équation différentielle

$$f''(t) + tf'(t) + f(t) = 0 \qquad\qquad (E)$$

a) En appliquant la transformation de Fourier à l'équation différentielle (E), montrer que

$$-\alpha\digamma'\left(f(t)\right)(\alpha) - 4\pi^2\alpha^2\digamma\left(f(t)\right)(\alpha) = 0 \qquad\qquad (E')$$

b) Résoudre l'équation $\left(E'\right)$.

4- Soit g définie sur $\mathbb{R}$, $g(t) = e^{-\frac{1}{4\pi^2}t^2}$

Sachant que

$$F\left(g\left(t\right)\right)\left(\alpha\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}e^{-\pi^2\alpha^2}$$

En déduire $f\left(t\right)$ la solution de l'équation $\left(E\right)$.

(EXAMEN FINAL 2024)

EXERCICE N1.

1- Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f\left(x\right)=\frac{1}{x\left(1+\left|\ln\left(x\right)\right|\right)^2}$$

En utilisant le changement de variable $\left(t=\ln\left(x\right)\right)$, montrer que $f\in L^1\left(]0,1]\right)$.

2- Montrer que l'ensemble $L^2(X,M,\mu)$ est un sous-espace vectoriel de $F(X;K)$.

3- Montrer que l'espace $L^\infty(X,M,\mu)$ est un espace de Banach.

EXERCICE N2. Soit $F\left(\alpha\right)=F\left(f\left(t\right)\right)\left(\alpha\right)$ la transformée de Fourier de $f\left(t\right)$, et $f,f'\in L^1\left(\mathbb{R}\right)$.

1- Montrer que

$$F\left(t^2f\left(t\right)\right)\left(\alpha\right)=-\frac{1}{4\pi^2}F''\left(\alpha\right),\qquad\qquad(E_1)$$

2- Calculer la transformée de Fourier de la fonction suivante

$$g(t)=e^{-t},\qquad t>0.$$

3- Utiliser la relation (E_1) pour calculer la transformée de Fourier de

$$k(t)=t^2e^{-t},\qquad t>0.$$

4- A' l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$F\left(\frac{df\left(t\right)}{dt}\right)\left(\alpha\right)=F\left(f'\left(t\right)\right)\left(\alpha\right)=2i\pi\alpha F\left(f\left(t\right)\right)\left(\alpha\right).$$

5- Utiliser la question 4, et à l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right)(\alpha) = \mathcal{F}\left(f^{(2)}(t)\right)(\alpha) = (2i\pi\alpha)^2 \mathcal{F}(f(t))(\alpha).$$

6- Soit $h(x)$ la fonction (pour $x > 0$) solution de l'équation différentielle suivante

$$h''(t) + 2h'(t) + h(t) = e^{-t} \qquad (E_2)$$

7- En appliquant la transformation de Fourier à l'équation différentielle (E_2), montrer que

$$\mathcal{F}(h(t))(\alpha) = \frac{1}{(1+2\pi i\alpha)^3} \qquad (E_3)$$

8- Par la question 3, conclure $h(t)$.

9- Par la relation (E_3). Comment pourrait on écrire $h(t)$ sous forme de produit de convolution d'une même fonction.

Bibliographie

[1] A. Chambert-Loir et S. Fermigier. Exercices de mathématiques pour l'agrégation, volume Analyse 3. Masson, 1995.

[2] A. Taik, Transformée de Laplace et Transformée de Fourier, Cours FI-GET-GPE-IMIAE, Département de Mathématiques FST-Mohammedia,2008.

[3] BREZIS, Haïm. Analyse fonctionnelle. Théorie et applications, 1983.

[4] Julia Matos. Analyse Fonctionnelle. Laboratoire de mathématiques et modélisation d'evry, université evry 2014–2015.

[5] L. Pugo. Menjouet, Introduction aux equations différentielles et aux dériveés partielles, Université Clude Bernard, Lyon I.France.

[6] Philippe Metzener, Abdelaziz Belqadhi. Transformée de Fourier-Laplace et applications aux EDO et EDP, 9 juin 2008

[7] Thibaut Deheuvels. Intégrale de Lebesgue (INTL), ENS de Rennes, 1A maths 2019.

[8] Walter Rudin. Analyse réelle et complexe. Masson, 1975.